

*СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ*

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ,
Я. Б. РУТИЦКИЙ

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ
И ПРОСТРАНСТВА
ОРИЧА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

*Серия выпускается под общим руководством
редакционной коллегии журнала
«Успехи математических наук»*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и Я. Б. РУТИЦКИЙ

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ
И
ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

АННОТАЦИЯ

В предлагаемой книге излагается теория широких классов выпуклых функций, играющих важную роль во многих разделах математики. Подробно развивается теория пространств Орлича (нормированных пространств, частным случаем которых являются пространства L^p) и указаны ее приложения.

Книга рассчитана на математиков (студентов старших курсов, аспирантов, научных работников), занимающихся функциональным анализом и его приложениями, а также различными вопросами теории функций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава I. Специальные классы выпуклых функций	
§ 1. N -функции	11
Выпуклые функции (11). Интегральное представление выпуклой функции (13). Определение N -функции (15). Свойства N -функций (17). Второе определение N -функций (19). Суперпозиция N -функций (20).	
§ 2. Дополнительная N -функция	22
Определение (22). Неравенство Юнга (23). Примеры (25). Неравенство для дополнительных функций (26).	
§ 3. Сравнение N -функций	26
Определение (26). Эквивалентные N -функции (27). Главная часть N -функции (23). Об одном признаке эквивалентности (29). Существование различных классов (32).	
§ 4. Δ_2 -условие	35
Определение (35). Признаки Δ_2 -условия (37). Δ_2 -условие для дополнительной N -функций (38). Примеры (40).	
§ 5. Δ' -условие	43
Определение (43). Достаточные признаки выполнения Δ' -условия (44). Δ' -условие для дополнительной функции (46). Примеры (47).	
§ 6. N -функции, растущие быстрее степенных	49
Δ_2 -условие (49). Оценки для дополнительной функции (50). Построение N -функций, эквивалентных дополнительным (51). Суперпозиция дополнительных функций (53). Δ^2 -условие (55). Свойства дополнительных функций (59). Признак Δ' -условия для дополнительной функции (62). Снова о суперпозициях N -функций (64).	
§ 7. Об одном классе N -функций	68
Постановка задачи (63). Класс \mathfrak{M} (69). Класс \mathfrak{N} (72). Теорема о дополнительной функции (75).	
Глава II. Пространства Орлича	
§ 8. Классы Орлича	76
Определение (76). Интегральное неравенство Иенсена (78). Сравнение классов (79). О структуре класса Орлича (80).	

§ 9. Пространство L_M^*	83
<p>Норма по Орличу (83). Полнота (87). Норма характеристической функции (88). Неравенство Гёльдера (89). Случай Δ_2-условия (91). Сходимость в среднем (92). Норма Люксембурга (95).</p>	
§ 10. Пространство E_M	98
<p>Определение (98). Сепарабельность E_M (99). Расположение класса L_M относительно пространства E_M (99). Необходимое условие сепарабельности пространства Орлича (103). Об определении нормы (104). Абсолютная непрерывность нормы (105). Вычисление нормы (106). Еще одна формула для нормы (110).</p>	
§ 11. Признаки компактности	112
<p>Теорема Валле-Пуссена (112). Функции Стеклова (113). Признак компактности А. Н. Колмогорова для пространств E_M (115). Второй признак компактности (117). Признак компактности Ф. Рисса для пространств E_M (118).</p>	
§ 12. Существование базиса	120
<p>Переход к пространству функций, заданных на отрезке (120). Функции Хаара (122). Базис в E_M (124). Еще раз об условии сепарабельности (126).</p>	
§ 13. Пространства, определенные различными N -функциями.	130
<p>Сравнение пространств (130). Неравенство для норм (132). Об одном признаке сходимости по норме (134). Произведение функций из пространств Орлича (137). Достаточные условия (141).</p>	
§ 14. Линейные функционалы	146
<p>Линейные функционалы в L_M^* (146). Общий вид линейного функционала на E_M (150). E_N-слабая сходимость (152). E_N-слабо непрерывные линейные функционалы (155). Норма функционала и $\ v\ _{(N)}$ (157).</p>	
<p>Глава III. Операторы в пространствах Орлича</p>	
§ 15. Условия непрерывности линейных интегральных операторов	159
<p>Постановка задачи (159). Общая теорема (160). Существование функций $\Phi(u)$ (161). Об одном свойстве N-функций, удовлетворяющих Δ'-условию (163). Достаточные условия непрерывности (168). О расщеплении непрерывного оператора (170).</p>	
§ 16. Условия полной непрерывности линейных интегральных операторов	173
<p>Случай непрерывных ядер (173). Основная теорема (174). Полная непрерывность и E_N-слабая сходимость (176). Теорема Цанена (180). Сравнение условий (184). О расщеплении вполне непрерывного оператора (189). Об операторах типа потенциала (191).</p>	
§ 17. Простейший нелинейный оператор	193
<p>Условие Каратеодори (193). Область определения оператора f (193). Теоремы о непрерывности (196). Ограниченность оператора f (199). Общий вид оператора f (200). Достаточные условия непрерывности и ограниченности оператора f (201). Оператор f и E_N-слабая сходимость (202).</p>	

§ 18. Дифференцируемость. Градиент нормы	203
Дифференцируемые функционалы (203). Измеримость функции $\theta(x)$ (203). Функционал для оператора f (205). Линейный оператор f (206). Производная Фреше (206). Специальное условие дифференцируемости (209). Вспомогательная лемма (214). Градиент Гато (214). Градиент нормы Люксембурга (215). Градиент нормы Орлича (217).	
Глава IV. Нелинейные интегральные уравнения	
§ 19. Оператор П. С. Урысона	222
Оператор П. С. Урысона (222). Ограниченность оператора П. С. Урысона (224). Переход к более простому оператору (225). Второй переход к более простому оператору (227). Третий переход к более простому оператору (228). Основная теорема о полной непрерывности оператора П. С. Урысона (229). Случай слабых нелинейностей (232). Операторы Гаммерштейна (235).	
§ 20. Некоторые теоремы существования	236
Рассматриваемые задачи (236). Существование решений (238). Положительные собственные функции (241). Собственные функции потенциальных операторов (243). Теорема о точках бифуркации (245).	
Сводка основных результатов	246
Литературные указания	259
Цитированная литература	267

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография состоит из четырех глав.

В первой из них изучаются различные классы выпуклых функций. Основное содержание этой главы до сих пор было опубликовано лишь в различных журнальных статьях. Авторам кажется, что содержание первой главы представляет интерес независимо от остальной части книги, так как выпуклые функции находят широкое применение в самых различных разделах математики.

Во второй главе излагается общая теория пространств Орлича — пространств, которые являются непосредственным широким обобщением пространств L^p .

Здесь рассматриваются обычные вопросы линейного функционального анализа в применении к пространствам Орлича: полнота, условия сепарабельности, существование базиса, эквивалентные нормировки, условия компактности, свойства линейных функционалов и т. д. Выясняется, что пространства Орлича во многих отношениях подобны пространствам L^p .

В третьей главе изучаются операторы и функционалы, определенные на пространствах Орлича.

Авторы пришли к необходимости применения пространств Орлича при рассмотрении нелинейных интегральных уравнений вида

$$\lambda \varphi(x) = \int_0^1 k(x, y) f[\varphi(y)] dy,$$

где $f(u)$ — функция, растущая быстрее любой степенной.

Оператор, определенный правой частью этого интегрального уравнения, не действует ни в одном пространстве L^p . Поэтому

исследование указанных интегральных уравнений методами нелинейного функционального анализа оказывалось затруднительным. Результаты второй и третьей глав позволяют исследовать широкие классы нелинейных уравнений.

Исследованию некоторых нелинейных задач посвящена четвертая, последняя глава книги.

Авторы пользуются случаем выразить благодарность Г. Е. Шилову, многие советы которого были использованы при подготовке настоящей книги к печати.

ГЛАВА I

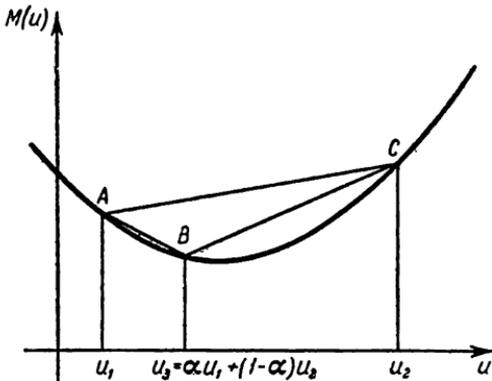
СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. *N*-функции

1. Выпуклые функции. Вещественная функция $M(u)$ вещественного переменного u называется *выпуклой*, если при всех значениях u_1 и u_2 выполняется неравенство

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [M(u_1) + M(u_2)]. \quad (1.1)$$

Нас будут интересовать только непрерывные выпуклые функции. Условие (1.1) означает, что середина хорды, соеди-



Черт. 1.

няющей две точки графика функции $M(u)$, лежит над соответствующей точкой графика. Геометрически ясно (черт. 1), что вся хорда лежит над графиком функции, т. е. что при всех α ($0 \leq \alpha \leq 1$) выполняется неравенство

$$M[\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2] \leq \alpha M(u_1) + (1 - \alpha) M(u_2). \quad (1.2)$$

Это неравенство называется *неравенством Иенсена*. Неравенство Иенсена можно доказать и аналитически. Допустим, действительно, что неравенство (1.2) выполняется не при всех α из $[0, 1]$. Тогда наибольшее значение M_0 на $[0, 1]$ непрерывной функции

$$f(\alpha) = M[\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2] - \alpha M(u_1) - (1 - \alpha)M(u_2)$$

будет положительным. Обозначим через α_0 наименьшее значение аргумента, при котором $f(\alpha)$ принимает значение M_0 . Пусть $\delta > 0$ такое число, что отрезок $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ содержится в $[0, 1]$. Применяя неравенство (1.1) к точкам

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)u_2,$$

$$u_2^* = (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)u_2,$$

и переходя к функции $f(\alpha)$, получим:

$$f(\alpha_0) \leq \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0.$$

Мы пришли к противоречию, что и доказывает неравенство (1.2).

Если $u_1 \neq u_2$, то знак равенства в (1.2) достигается или только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, или при всех $\alpha \in [0, 1]$. Действительно, пусть при некотором $\alpha_0 \in (0, 1)$ в (1.2) достигается знак равенства. Это означает, что $f(\alpha_0) = 0$. Покажем, что в этом случае $f(\alpha) = 0$ при всех $\alpha \in [0, 1]$. Легко проверить, что непрерывная функция $f(\alpha)$ выпукла. Поэтому она также удовлетворяет неравенству Иенсена. Допустим, что при некотором $\alpha_1 \in (0, 1)$ $f(\alpha_1) < 0$ (по уже доказанному $f(\alpha)$ не может быть положительной). Допустим, для определенности, что $\alpha_1 < \alpha_0$. Так как $\alpha_0 = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} \alpha_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}$, то по неравенству Иенсена

$$f(\alpha_0) \leq \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) - \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} f(1) = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) < 0,$$

что противоречит условию $f(\alpha_0) = 0$.

Неравенство (1.1) допускает еще одно обобщение: при любых u_1, u_2, \dots, u_n

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} [M(u_1) + M(u_2) + \dots + M(u_n)]. \quad (1.3)$$

Последовательным применением (1.1) неравенство (1.3) доказывается для всех n вида 2^k . Более сложным является случай произвольного n . Пусть m — такое число, что $n + m = 2^k$. Тогда

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n + mu^*}{n + m}\right) \leq \frac{1}{n + m} [M(u_1) + M(u_2) + \dots + M(u_n) + mM(u^*)].$$

Положив $u^* = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$, получим (1.3).

Допустим, что $u_1 \leq u_3 \leq u_2$. Тогда

$$u_3 = \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} u_1 + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} u_2,$$

и в силу неравенства (1.2)

$$M(u_3) \leq \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} M(u_1) + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} M(u_2),$$

откуда следует, что

$$\frac{M(u_3) - M(u_1)}{u_3 - u_1} \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{M(u_2) - M(u_3)}{u_2 - u_3}. \quad (1.4)$$

Полученное неравенство (см. черт. 1) означает, что угловой коэффициент хорды AB меньше углового коэффициента хорды AC , который в свою очередь меньше углового коэффициента хорды BC .

2. Интегральное представление выпуклой функции.

Лемма 1.1. *Непрерывная выпуклая функция $M(u)$ имеет в каждой точке правую производную $p_+(u)$ и левую производную $p_-(u)$, причем*

$$p_-(u) \leq p_+(u). \quad (1.5)$$

Доказательство. В силу (1.4) при $0 < h_1 < h_2$

$$\begin{aligned} \frac{M(u) - M(u - h_2)}{h_2} &\leq \frac{M(u) - M(u - h_1)}{h_1} \leq \frac{M(u + h_1) - M(u)}{h_1} \leq \\ &\leq \frac{M(u + h_2) - M(u)}{h_2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из этих неравенств вытекает, что отношение

$$\frac{M(u) - M(u-h)}{h}$$

не убывает при $h \rightarrow +0$ и, следовательно, имеет предел $p_-(u)$. Аналогично, отношение $\frac{M(u+h) - M(u)}{h}$ не возрастает при $h \rightarrow +0$ и имеет предел $p_+(u)$. Неравенство (1.5) также вытекает из (1.6).

Лемма 1.2. Правая производная $p_+(u)$ непрерывной выпуклой функции $M(u)$ является неубывающей непрерывной справа функцией.

Доказательство. Пусть $u_1 < u_2$. Тогда при достаточно малых положительных h

$$u_1 + h < u_2 - h$$

и в силу (1.4)

$$\frac{M(u_1 + h) - M(u_1)}{h} \leq \frac{M(u_2) - M(u_2 - h)}{h}.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$p_+(u_1) \leq p_-(u_2). \quad (1.7)$$

Из этого неравенства и (1.5) вытекает, что

$$p_+(u_1) \leq p_+(u_2). \quad (1.8)$$

Таким образом, монотонность функции $p_+(u)$ доказана.

Как было показано при доказательстве леммы 1.1, при всех $h > 0$

$$p_+(u) \leq \frac{M(u+h) - M(u)}{h}.$$

Фиксируя h и переходя к пределу при $u \rightarrow u_0 + 0$, получим в силу непрерывности функции $M(u)$:

$$\lim_{u \rightarrow u_0 + 0} p_+(u) \leq \frac{M(u_0 + h) - M(u_0)}{h}. \quad (1.9)$$

Предел в левой части неравенства существует в силу монотонности функции $p_+(u)$. Переходя в (1.9) к пределу при $h \rightarrow +0$, получим:

$$\lim_{u \rightarrow u_0 + 0} p_+(u) \leq p_+(u_0).$$

С другой стороны, $p_+(u) \geq p_+(u_0)$ при $u \geq u_0$, в силу чего

$$\lim_{u \rightarrow u_0 + 0} p_+(u) \geq p_+(u_0).$$

Таким образом,

$$\lim_{u \rightarrow u_0 + 0} p_+(u) = p_+(u_0).$$

Это равенство и означает непрерывность функции $p_+(u)$ справа.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Аналогично можно доказать, что левая производная $p_-(u)$ является неубывающей непрерывной слева функцией.

Л е м м а 1.3. Выпуклая функция $M(u)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в каждом конечном интервале.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь промежуток $[a, b]$. Пусть $a < u_1 < u_2 < b$. В силу (1.4)

$$\frac{M(u_1) - M(a)}{u_1 - a} \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{M(b) - M(u_2)}{b - u_2}.$$

Из последних неравенств следует, что

$$p_+(a) \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq p_-(b),$$

т. е. что величина $\left| \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \right|$ ограничена для всех u_1, u_2 из промежутка $[a, b]$.

Лемма доказана.

Т е о р е м а 1.1. Всякая выпуклая функция $M(u)$, удовлетворяющая условию $M(a) = 0$, представима в виде

$$M(u) = \int_a^u p(t) dt, \quad (1.10)$$

где $p(t)$ — неубывающая непрерывная справа функция.

Доказательство. Заметим прежде всего, что функция $M(u)$ почти везде имеет производную. Действительно, в силу (1.7) и (1.5) при $u_2 > u_1$

$$p_-(u_2) \geq p_+(u_1) \geq p_-(u_1). \quad (1.11)$$

Так как функция $p_-(u)$ монотонна, то она почти везде непрерывна. Пусть u_1 — точка непрерывности функции $p_-(u)$. Переходя к пределу в (1.11) при $u_2 \rightarrow u_1$, получим:

$$p_-(u_1) \geq p_+(u_1) \geq p_-(u_1),$$

т. е.

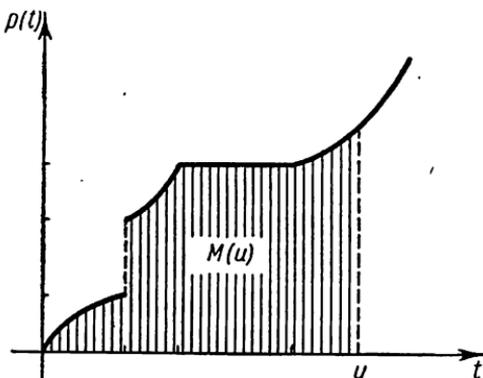
$$p_-(u_1) = p_+(u_1).$$

Таким образом, почти везде

$$M'(u) = p(u) = p_+(u).$$

Так как функция $M(u)$ в силу леммы 1.3 абсолютно непрерывна, то она является (см., например, [38]) неопределенным интегралом своей производной.

Теорема доказана.



Черт. 2.

3. Определение N -функции. Функция $M(u)$ называется N -функцией, если она допускает представление

$$M(u) = \int_0^u p(t) dt, \quad (1.12)$$

где $p(t)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geq 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty. \quad (1.13)$$

Грубо говоря, указанные выше условия означают, что функция $p(t)$ должна иметь график такого вида, как на черт. 2. Зна-

чение самой N -функции есть величина площади соответствующей криволинейной трапеции.

N -функциями, например, являются функции

$$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha} (\alpha > 1), \quad M_2(u) = e^{u^2} - 1.$$

Для первой из них $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}$, для второй $p_2(t) = M_2'(t) = 2te^{t^2}$.

4. Свойства N -функций. Из представления (1.12) вытекает, что каждая N -функция четна, непрерывна, принимает в нуле нулевое значение и возрастает при положительных значениях аргумента.

N -функции выпуклы. Действительно, если $0 \leq u_1 < u_2$, то в силу монотонности функции $p(t)$

$$\begin{aligned} M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= \int_0^{\frac{u_1 + u_2}{2}} p(t) dt \leq \\ &\leq \int_0^{u_1} p(t) dt + \frac{1}{2} \left[\int_{u_1}^{\frac{u_1 + u_2}{2}} p(t) dt + \int_{\frac{u_1 + u_2}{2}}^{u_2} p(t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{u_1} p(t) dt + \int_0^{u_2} p(t) dt \right] = \frac{1}{2} [M(u_1) + M(u_2)]. \end{aligned}$$

В случае любых u_1, u_2

$$\begin{aligned} M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= M\left(\frac{|u_1 + u_2|}{2}\right) \leq M\left(\frac{|u_1| + |u_2|}{2}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} [M(u_1) + M(u_2)]. \end{aligned}$$

Полагая в (1.2) $u_2 = 0$, получим:

$$M(\alpha u_1) \leq \alpha M(u_1) \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \quad (1.14)$$

Первое из условий (1.13) означает, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0. \quad (1.15)$$

Из второго условия (1.13) вытекает, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty, \quad (1.16)$$

так как при $u > 0$

$$\frac{M(u)}{u} = \frac{1}{u} \int_0^u p(t) dt \geq \frac{1}{u} \int_{\frac{u}{2}}^u p(t) dt \geq \frac{1}{2} p\left(\frac{u}{2}\right).$$

Отметим, что для N -функций знак равенства в (1.14) может иметь место лишь в случае, когда $\alpha = 0, 1$, или $u_1 = 0$. Действительно, пусть $u_1 \neq 0$ и при некотором $\alpha \in (0, 1)$ в (1.14) имеет место знак равенства. Тогда в силу сказанного на стр. 12 знак равенства в (1.14) имеет место при всех $\alpha \in [0, 1]$. Но тогда при всех $\alpha \in [0, 1]$

$$\frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1},$$

что противоречит (1.15).

Таким образом,

$$M(\alpha, u) < \alpha M(u) \quad (0 < \alpha < 1, u \neq 0). \quad (1.17)$$

Из этого неравенства вытекает, что функция $\frac{M(u)}{u}$ при положительных значениях u строго возрастает:

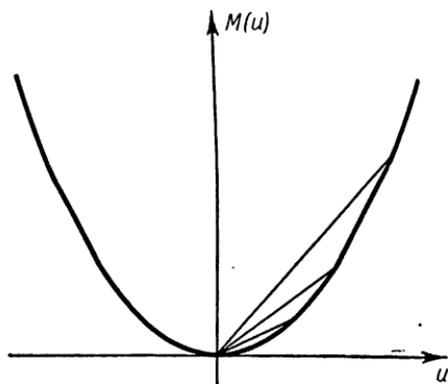
$$\frac{M(u')}{u'} < \frac{M(u)}{u} \quad (0 < u' < u). \quad (1.18)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно положить в (1.17) $\alpha = \frac{u'}{u}$.

Установленные свойства достаточно полно описывают график N -функции (черт. 3). Свойство (1.15) означает, что ось абсцисс касательна к графику N -функции в начале координат. Свойства (1.18) и (1.16) характеризуют изменение углового коэффициента хорды, соединяющей начало координат с переменной точкой на графике N -функции. График может содержать точки излома и прямолинейные отрезки. Точки

излома соответствуют точкам разрыва функции $p(t)$, а прямолинейные отрезки — промежуткам постоянства функции $p(t)$.

Обозначим через $M^{-1}(v)$ ($0 \leq v < \infty$) функцию, обратную к N-функции $M(u)$, рассматриваемой при неотрицательных



Черт. 3.

значениях аргумента. Эта функция вогнута, так как в силу неравенства (1.2)

$$M^{-1}[\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2] \geq \alpha M^{-1}(v_1) + (1 - \alpha)M^{-1}(v_2)$$

при $v_1, v_2 \geq 0$.

Из монотонности правой производной $p(u)$ N-функции $M(u)$ следует неравенство

$$\begin{aligned} M(u) + M(v) &= \int_0^{|u|} p(t) dt + \int_0^{|v|} p(t) dt \leq \int_0^{|u|} p(t) dt + \\ &+ \int_{|u|}^{|u|+|v|} p(t) dt = \int_0^{|u|+|v|} p(t) dt = M(|u| + |v|). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Пусть $a = M(u)$, $b = M(v)$ — произвольные неотрицательные числа. Тогда из (1.19) следует, что

$$M^{-1}(a + b) \leq M^{-1}(a) + M^{-1}(b). \quad (1.20)$$

5. Второе определение N-функции. Иногда удобно применять следующее определение: непрерывная выпуклая

функция $M(u)$ называется N -функцией, если она четна и удовлетворяет условиям (1.15) и (1.16). Покажем, что это определение эквивалентно данному выше. В доказательстве нуждается только тот факт, что из второго определения N -функции вытекает возможность представления ее в виде (1.12).

В силу (1.15) $M(0) = 0$. Поэтому в силу четности функции $M(u)$ и теоремы 1.1 она представима в виде

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt,$$

где $p(u)$ — не убывающая при $u > 0$, непрерывная справа функция (правая производная функции $M(u)$). Так как при $u > 0$

$$p(u) \geq \frac{M(u)}{u},$$

то $p(u) > 0$ при $u > 0$ и в силу (1.16)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} p(u) = \infty.$$

С другой стороны, при $u > 0$

$$M(2u) = \int_0^{2u} p(t) dt > \int_u^{2u} p(t) dt > up(u),$$

откуда

$$p(u) < \frac{M(2u)}{u}.$$

Поэтому в силу (1.15)

$$p(0) = \lim_{u \rightarrow 0} p(u) = 0.$$

6. Суперпозиция N -функций. Суперпозиция $M(u) = M_2[M_1(u)]$ двух N -функций $M_1(u)$ и $M_2(u)$ также является N -функцией. Действительно, функция $M(u)$ имеет (при $u > 0$) правую производную

$$p(u) = p_2[M_1(u)] p_1(u),$$

где $p_1(u)$, $p_2(u)$ — правые производные N -функций $M_1(u)$ и $M_2(u)$. Функция $p(u)$ непрерывна справа, не убывает и удовлетворяет условиям (1.13), так как этим условиям удовлетворяют функции $p_1(u)$ и $p_2(u)$.

Справедливо и обратное утверждение: всякая N -функция $M(u)$ является суперпозицией $M(u) = M_2[M_1(u)]$ двух N -функций.

Если N -функция $M_1(u)$ задана, то функция $M_2(u)$ однозначно определится равенством

$$M_2(u) = M[M_1^{-1}(|u|)], \quad (1.21)$$

где $M_1^{-1}(v)$ — функция, обратная к $M_1(u)$.

Таким образом, для представления $M(u)$ в виде суперпозиции нужно найти такую N -функцию $M_1(u)$, чтобы $M_2(u) = M[M_1^{-1}(|u|)]$ также являлась N -функцией.

Так как при $u > 0$

$$p_2(u) = \frac{p[M_1^{-1}(u)]}{p_1[M_1^{-1}(u)]},$$

то для того, чтобы $M_2(u)$ была N -функцией, необходимо и достаточно, чтобы функция $\frac{p(u)}{p_1(u)}$ была неубывающей, непрерывной справа и удовлетворяла условиям (1.13), ибо непрерывная функция $M_1^{-1}(v)$ монотонна и стремится к нулю и бесконечности вместе с v .

Таким образом, если мы найдем такую неубывающую, непрерывную справа функцию $p_1(u)$, удовлетворяющую условиям (1.13), что функция $\frac{p(u)}{p_1(u)}$ также является неубывающей, непрерывной справа и удовлетворяет условиям (1.13), то функции

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} p_1(t) dt$$

и $M_2(u)$, определенная равенством (1.19), будут N -функциями, причем справедливо равенство $M(u) = M_2[M_1(u)]$.

В качестве функции $p_1(u)$ можно, в частности, взять функцию

$$p_1(u) = [p(u)]^{\varepsilon_0} \quad (0 < \varepsilon_0 < 1).$$

Заметим еще, что если N -функция $M(u)$ есть суперпозиция $M_2[M_1(u)]$ двух N -функций $M_1(u)$ и $M_2(u)$, то каждому $k > 0$ соответствует такая постоянная $u_0 \geq 0$, что при $u \geq u_0$

$$M(u) > M_2(ku).$$

§ 2. Дополнительная N -функция

1. Определение. Пусть $p(t)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geq 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям (1.13). Определим функцию $q(s)$ ($s \geq 0$) равенством

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t. \quad (2.1)$$

Нетрудно видеть, что функция $q(s)$ обладает теми же свойствами, что и функция $p(t)$: она положительна при $s > 0$, непрерывна справа при $s \geq 0$, не убывает и удовлетворяет условиям

$$q(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} q(s) = \infty. \quad (2.2)$$

Непосредственно из определения функции $q(s)$ вытекают неравенства

$$q[p(t)] \geq t, \quad p[q(s)] \geq s, \quad (2.3)$$

и при $\varepsilon > 0$

$$q[p(t) - \varepsilon] \leq t, \quad p[q(s) - \varepsilon] \leq s. \quad (2.4)$$

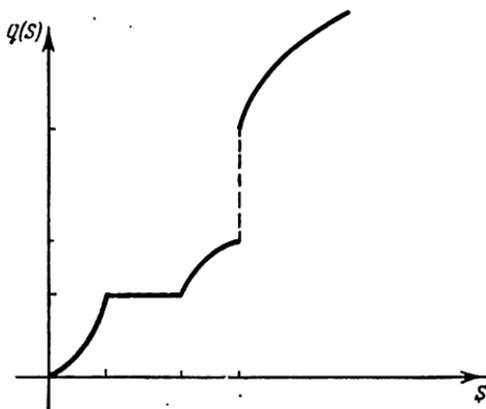
Если функция $p(t)$ непрерывна и монотонно возрастает, то функция $q(s)$ — это обычная обратная к $p(t)$ функция. В общем случае функция $q(s)$ называется *правой обратной* к $p(t)$. Функция $p(t)$ в свою очередь является правой обратной к $q(s)$. На черт. 4 изображен график функции $q(s)$ — правой обратной к функции $p(t)$, график которой изображен на черт. 2.

Функции

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt, \quad N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds$$

называют *дополнительными друг к другу N -функциями*.

Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ — дополнительные друг к другу N -функции. В ряде случаев приходится рассматривать N -функ-



Черт. 4.

цию $\Phi_1(u) = a\Phi(bu)$ ($a, b > 0$). Дополнительная к ней N -функция $\Psi_1(v)$ определится равенством

$$\Psi_1(v) = a\Psi\left(\frac{v}{ab}\right). \quad (2.5)$$

Действительно, правая производная $p_1(t)$ функции $\Phi_1(u)$ равна $abp(bt)$, где $p(t)$ — правая производная N -функции $\Phi(u)$. Отсюда

$$q_1(s) = \frac{1}{b} q\left(\frac{s}{ab}\right)$$

и

$$\Psi_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s) ds = \frac{1}{b} \int_0^{|v|} q\left(\frac{s}{ab}\right) ds = a \int_0^{\frac{|v|}{ab}} q(s) ds,$$

откуда и следует (2.5).

2. Неравенство Юнга. Воспользуемся соображениями, обычно применяющимися при выводе неравенства Гельдера. На черт. 5 площади T и S выражают соответственно

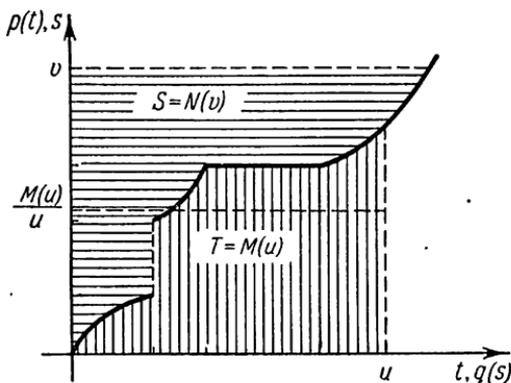
значения N -функций $M(u)$ и $N(v)$. Геометрически ясно, что имеет место неравенство

$$uv \leq T + S = M(u) + N(v).$$

В силу четности функций $M(u)$ и $N(v)$ последнее неравенство, которое называют *неравенством Юнга*, справедливо для всех u, v . Таким образом,

$$uv \leq M(u) + N(v). \quad (2.6)$$

Как видно из того же черт. 5, неравенство (2.6) превращается в равенство при $v = p(|u|) \operatorname{sign} u$, если задано u



Черт. 5.

и при $u = q(|v|) \operatorname{sign} v$, если задано v . Таким образом,

$$|u| p(|u|) = M(u) + N[p(|u|)] \quad (2.7)$$

и

$$|v| q(|v|) = M[q(|v|)] + N(v). \quad (2.8)$$

Из (2.6) следует:

$$N(v) \geq uv - M(u).$$

В силу (2.8) это неравенство переходит в равенство при $u = q(|v|) \operatorname{sign} v$. Следовательно,

$$N(v) = \max_{u \geq 0} [u|v| - M(u)]. \quad (2.9)$$

Формулу (2.9) можно было бы принять за определение N -функции, дополнительной к $M(u)$.

Из неравенства Юнга вытекает, что

$$M^{-1}(v)N^{-1}(v) \leq 2v \quad (v > 0).$$

С другой стороны, из черт. 5 видно, что $N\left[\frac{M(u)}{u}\right] < M(u)$. Отсюда при $M(u) = v$ следует, что

$$v < M^{-1}(v)N^{-1}(v).$$

Таким образом, при всех $v > 0$

$$v < M^{-1}(v)N^{-1}(v) \leq 2v. \quad (2.10)$$

3. Примеры. Как уже указывалось, функция $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > 1$) есть N -функция. Вычислим дополнительную к ней. Очевидно, при $t > 0$

$$p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}.$$

Поэтому

$$q_1(s) = s^{\beta-1} \quad (s \geq 0),$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, и

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s) ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}.$$

В качестве второго примера вычислим N -функцию, дополнительную к N -функции $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$. Для этой функции

$$p_2(t) = M_2'(t) = e^t - 1 \quad (t \geq 0),$$

откуда

$$q_2(s) = \ln(s+1) \quad (s \geq 0),$$

и

$$N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s) ds = (1 + |v|) \ln(1 + |v|) - |v|. \quad (2.11)$$

Отметим, что отыскание явной формулы для дополнительной N -функции во многих случаях невозможно. Например, если $M(u) = e^{u^2} - 1$, то $p(t) = 2te^{t^2}$, и выразить $q(s)$ в явном виде не удается.

4. Неравенство для дополнительных функций.

Теорема 2.1. Пусть для N -функций $M_1(u)$ и $M_2(u)$ выполняется неравенство

$$M_1(u) \leq M_2(u)$$

при $u \geq u_0$.

Тогда для дополнительных N -функций $N_1(v)$ и $N_2(v)$ справедливо неравенство

$$N_2(v) \leq N_1(v)$$

при $v \geq v_0 = p_2(u_0)$.

Доказательство. Пусть $p_2(u)$ — правая производная N -функции $M_2(u)$. В силу монотонности функции $q_2(v)$ при $v \geq v_0 = p_2(u_0)$ справедливо неравенство $q_2(v) \geq u_0$.

В силу (2.8)

$$q_2(v) \cdot v = M_2[q_2(v)] + N_2(v),$$

а в силу неравенства Юнга

$$q_2(v) \cdot v \leq M_1[q_2(v)] + N_1(v),$$

так что

$$M_2[q_2(v)] + N_2(v) \leq M_1[q_2(v)] + N_1(v).$$

Так как $M_2[q_2(v)] \geq M_1[q_2(v)]$ при $v \geq v_0$, то

$$N_2(v) \leq N_1(v).$$

Теорема доказана.

§ 3. Сравнение N -функций

1. Определение. В дальнейшем существенную роль будет играть «быстрота роста» значений N -функций при $u \rightarrow \infty$. В связи с этим удобно ввести следующее обозначение. Будем писать:

$$M_1(u) \rightarrow M_2(u), \quad (3.1)$$

если найдутся такие положительные постоянные u_0 и k , что

$$M_1(u) \leq M_2(ku) \quad (u \geq u_0). \quad (3.2)$$

Будем называть N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ *сравнимыми*, если имеет место одно из соотношений $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$ или $M_2(u) \rightarrow M_1(u)$.

Нетрудно проверить, что из $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$ и $M_2(u) \rightarrow M_3(u)$ следует, что $M_1(u) \rightarrow M_3(u)$. Множество элементов, в котором введено соотношение типа (3.1), удовлетворяющее указанному свойству, называют *полуупорядоченным* множеством. Таким образом, N -функции образуют множество, полуупорядоченное при помощи символа \rightarrow .

Простейшим примером N -функций, удовлетворяющих соотношению (3.1), являются функции $M_1(u) = |u|^{\alpha_1}$, $M_2(u) = |u|^{\alpha_2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 > 1$), если $\alpha_1 < \alpha_2$.

Рассмотрим теперь N -функцию $M(u) = |u|^\alpha (|\ln |u|| + 1)$ ($\alpha > 1$). Очевидно, $|u|^\alpha \rightarrow M(u) \rightarrow |u|^{\alpha+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$.

2. Эквивалентные N -функции. N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ будем называть *эквивалентными* и писать $M_1(u) \sim M_2(u)$, если $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$ и $M_2(u) \rightarrow M_1(u)$.

Очевидно, каждая N -функция эквивалентна самой себе, и если две N -функции эквивалентны третьей, то они эквивалентны друг другу. В силу этого множество всех N -функций распадается на классы функций, эквивалентных друг другу.

Из определения вытекает, что N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие положительные постоянные k_1 , k_2 и u_0 , что

$$M_1(k_1 u) \leq M_2(u) \leq M_1(k_2 u) \quad (u \geq u_0). \quad (3.3)$$

Из этих неравенств, в частности, следует, что N -функция $M(u)$ эквивалентна N -функции $M(ku)$ при любом $k > 0$. Очевидна также эквивалентность N -функций $M(u)$ и $M_1(u)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{M_1(u)} = a > 0. \quad (3.4)$$

Теорема 3.1. Пусть $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$. Тогда дополнительные к ним N -функции связаны соотношением

$$N_2(v) \rightarrow N_1(v).$$

Доказательство. По условию найдутся такие k , $u_0 > 0$, что

$$M_1(u) \leq M_2(ku) \quad (u \geq u_0). \quad (3.5)$$

Положим $M(u) = M_2(ku)$. Функция $N(v)$, дополнительная к $M(u)$, в силу (2.5) равна $N_2\left(\frac{v}{k}\right)$.

Неравенство (3.5) можно переписать в виде

$$M_1(u) \leq M(u) \quad (u \geq u_0).$$

В силу теоремы 2.1 найдется такое $v_0 > 0$, что

$$N(v) \leq N_1(v) \quad (v \geq v_0),$$

откуда следует, что

$$N_2(v) \leq N_1(kv) \quad \left(v \geq \frac{v_0}{k}\right).$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Теорема 3.2 Если N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ эквивалентны, то дополнительные к ним N -функции $N_1(v)$ и $N_2(v)$ также эквивалентны.

Теорема 3.2 означает, что классу эквивалентных между собой N -функций при переходе к дополнительным соответствует также класс эквивалентных N -функций.

3. Главная часть N -функции. Выпуклую функцию $Q(u)$ будем называть *главной частью* (гл. ч.) N -функции $M(u)$, если $Q(u) = M(u)$ при больших значениях аргумента.

Теорема 3.3. Пусть выпуклая функция $Q(u)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Q(u)}{u} = \infty. \quad (3.6)$$

Тогда $Q(u)$ есть главная часть некоторой N -функции $M(u)$.

Доказательство. Из условия (3.6) вытекает, что $\lim_{u \rightarrow \infty} Q(u) = \infty$. Допустим, что $Q(u)$ выпукла и положительна при $u \geq u_0$. В силу теоремы 1.1 функция $Q(u)$ допускает представление

$$Q(u) = \int_{u_0}^u p(t) dt + Q(u_0),$$

где $p(u)$ — неубывающая, непрерывная справа функция. Эта функция удовлетворяет условию $\lim_{u \rightarrow \infty} p(u) = \infty$, так как из

ограниченности функции $p(u)$, т. е. из $p(u) \leq b$, следовало бы, что

$$Q(u) \leq b(u - u_0) + Q(u_0),$$

что противоречит (3.6). Без ограничения общности можно считать, что $p(u)$ положительна при $u \geq u_0$.

Так как $p(u)$ неограниченно возрастает, то можно указать такое $u_1 \geq u_0 + 1$, что

$$p(u_1) > p(u_0 + 1) + Q(u_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q(u_1) &= \int_{u_0}^{u_0+1} p(t) dt + \int_{u_0+1}^{u_1} p(t) dt + Q(u_0) \leq \\ &\leq p(u_0 + 1) + Q(u_0) + p(u_1)(u_1 - u_0 - 1) \leq p(u_1)(u_1 - u_0), \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha = \frac{u_1 p(u_1)}{Q(u_1)} > 1.$$

Определим функцию $M(u)$ равенством

$$M(u) = \begin{cases} \frac{Q(u_1)}{u_1^\alpha} |u|^\alpha & \text{при } |u| \leq u_1, \\ Q(u) & \text{при } |u| \geq u_1. \end{cases}$$

Функция $M(u)$ является N -функцией, так как ее правая производная

$$M'_+(u) = \begin{cases} \frac{\alpha Q(u_1)}{u_1^\alpha} u^{\alpha-1} & \text{при } 0 \leq u \leq u_1, \\ p(u) & \text{при } u \geq u_1 \end{cases}$$

является положительной при $u > 0$, непрерывной справа при $u \geq 0$, неубывающей функцией, удовлетворяющей условиям (1.13).

Теорема доказана.

4. Об одном признаке эквивалентности. Множество F на числовой прямой будем называть множеством полной меры, если равна нулю мера множества точек, не принадлежащих F .

Рассмотрим две N -функции

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} p_1(t) dt, \quad M_2(u) = \int_0^{|u|} p_2(t) dt. \quad (3.7)$$

Лемма 3.1. Пусть существуют такие постоянные $k, u_0 > 0$ и такое множество F полной меры, что

$$p_1(u) \leq p_2(ku) \quad (u \geq u_0, u \in F).$$

Тогда N -функции

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} p_1(t) dt \quad \text{и} \quad M_2(u) = \int_0^{|u|} p_2(t) dt$$

удовлетворяют соотношению $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$.

Доказательство. Интегрируя данное в условии леммы неравенство в пределах от u_0 до u , получим:

$$M_1(u) - M_1(u_0) \leq \frac{1}{k} [M_2(ku) - M_2(ku_0)] < \frac{1}{k} M_2(ku) \quad (u \geq u_0).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $k > 1$. В силу того, что $M_1(u)$ неограниченно возрастает, найдется такое $u_1 \geq u_0$, что при $u \geq u_1$

$$M_1(u) - M_1(u_0) \geq \frac{1}{k} M_1(u).$$

Поэтому при $u \geq u_1$

$$M_1(u) \leq M_2(ku).$$

Лемма доказана.

Из леммы 3.1 вытекает, что $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$, если при больших u выполняется неравенство $p_1[\alpha q_2(\beta u)] < u$.

Лемма 3.2. Пусть

$$\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ u \in F}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} = b > 0, \quad (3.8)$$

где F — множество полной меры.

Тогда $M_1(u) \sim M_2(u)$.

Доказательство. В силу (3.8) можно указать такое $u_0 > 0$, что при $u \geq u_0$ и $u \in F$

$$p_1(u) \leq 2bp_2(u).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от u_0 до u , получим:

$$M_1(u) - M_1(u_0) \leq 2b [M_2(u) - M_2(u_0)] \quad (u \geq u_0),$$

откуда, в силу того, что $\lim_{u \rightarrow \infty} M_2(u) = \infty$, вытекает, что при больших значениях u

$$M_1(u) \leq (2b + 1) M_2(u).$$

Из этого неравенства в силу (1.17) вытекает, что при больших u

$$M_1(u) \leq M_2[(2b + 1)u],$$

т. е. что

$$M_1(u) \rightarrow M_2(u).$$

Аналогично доказывается соотношение $M_2(u) \rightarrow M_1(u)$.

Лемма доказана.

В условиях леммы 3.2 играют роль только значения функций $p_1(u)$ и $p_2(u)$ при больших значениях аргумента. Здесь, как и в ряде других случаев, при рассмотрении правых производных $p(u)$ N -функций $M(u)$ важно иметь формулу для функции $p(u)$ лишь при больших значениях u . В связи с этим будем пользоваться следующим определением: функция $\varphi(u)$ называется *главной частью* (гл. ч.) функции $p(u)$, если при больших значениях аргумента они совпадают.

Теорема 3.4. Пусть заданы N -функции (3.7) и дополнительные к ним N -функции

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s) ds, \quad N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s) ds.$$

Пусть существует такое множество F_1 полной меры, что

$$\lim_{\substack{v \rightarrow \infty \\ v \in F_1}} \frac{p_1[q_2(v)]}{v} = b > 0. \quad (3.9)$$

Тогда $M_1(u) \sim M_2(v)$.

Доказательство. Введем обозначение $q_2(v) = u$. В силу (2.3)

$$p_2[q_2(v)] = p_2(u) \geq v \quad (3.10)$$

и в силу (2.4) при любом $\varepsilon > 0$

$$p_2(u - \varepsilon) \leq v. \quad (3.11)$$

Обозначим через F подмножество F_1 , состоящее из точек, в которых непрерывны функции $p_1(u)$ и $p_2(u)$. Так как

каждая монотонная функция имеет не более чем счетное число точек разрыва, то F также является множеством полной меры.

Из (3.10) вытекает, что

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} \leq \frac{p_1(u)}{v} = \frac{p_1[q_2(v)]}{v},$$

откуда в силу (3.9)

$$\overline{\lim}_{\substack{u \rightarrow \infty \\ u \in F_1}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} \leq b. \quad (3.12)$$

Из (3.11) следует, что при всех $u \in F$

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p_1(u)}{p_2(u-\varepsilon)} \geq \frac{p_1(u)}{v} = \frac{p_1[q_2(v)]}{v},$$

откуда в силу (3.9)

$$\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ u \in F}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} \geq b. \quad (3.13)$$

Из неравенства (3.12) и (3.13) вытекает, что

$$\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ u \in F}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} = b.$$

Из последнего равенства и леммы 3.2 следует, что $M_1(u) \sim M_2(u)$. Теорема доказана.

Б. Существование различных классов. В связи с введением классов эквивалентных N -функций возникает вопрос о том, «сколько» есть различных таких классов. Ясно, например, что N -функции $|u|^\alpha$ при различных $\alpha > 1$ принадлежат различным классам. N -функция $M(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|$ удовлетворяет соотношению $M(u) \rightarrow \rightarrow |u|^\alpha$ ($\alpha > 1$), но она не эквивалентна ни одной N -функции $|u|^\alpha$. Не эквивалентна ни одной N -функции $|u|^\alpha$ и N -функция $M_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, которая удовлетворяет соотношению $|u|^\alpha \rightarrow \rightarrow M_1(u)$.

Пусть теперь

$$M_n(u) = \int_0^{|u|} p_n(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.14)$$

— произвольная последовательность N -функций. Построим такие N -функции $M(u)$ и $\Phi(u)$, что

$$M_n(u) \rightarrow M(u) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.15)$$

и

$$\Phi(u) \rightarrow M_n(u) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.16)$$

Пусть $p(t) = p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_n(t)$ при $n - 1 \leq t < n$. Функция $p(t)$ непрерывна справа, монотонно возрастает и удовлетворяет условиям (1.13). В силу леммы 3.1 N -функция

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$$

будет удовлетворять соотношению (3.15).

По уже доказанному можно построить N -функцию $\Psi(v)$, удовлетворяющую соотношениям

$$N_n(v) \rightarrow \Psi(v),$$

где $N_n(v)$ — функции, дополнительные к N -функциям (3.14). В силу теоремы 3.1 дополнительная к $\Psi(v)$ N -функция $\Phi(u)$ будет удовлетворять условиям (3.16).

Пусть $M(u)$ — некоторая N -функция. Функция $M_1(u) = e^{M(u)} - 1$ также является N -функцией. Очевидно, $M(u) \rightarrow M_1(u)$. Легко видеть, что в случае, когда $M(u)$ растет не быстрее степенной, $M_1(u)$ не эквивалентна $M(u)$. Эти функции не эквивалентны друг другу и для многих других N -функций. Однако существуют и такие N -функции $M(u)$, что $e^{M(u)} - 1 \sim M(u)$ (предоставляем читателю построить пример!).

Нетрудно для произвольной N -функции $M(u)$ построить такие неэквивалентные ей N -функции $Q(u)$ и $R(u)$, что

$$Q(u) \rightarrow M(u) \rightarrow R(u).$$

Для этого правую производную $r(u)$ функции $R(u)$ достаточно определить равенством

$$r(u) = np(nu) \quad \text{при } n - 1 \leq u < n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Функцию $Q(u)$ можно определить как дополнительную к N -функции $\Psi(v)$, удовлетворяющей условиям: $N(v) \rightarrow \Psi(v)$ и $\Psi(v)$ не эквивалентна $N(v)$, где $N(v)$ — дополнительная к $M(u)$ функция.

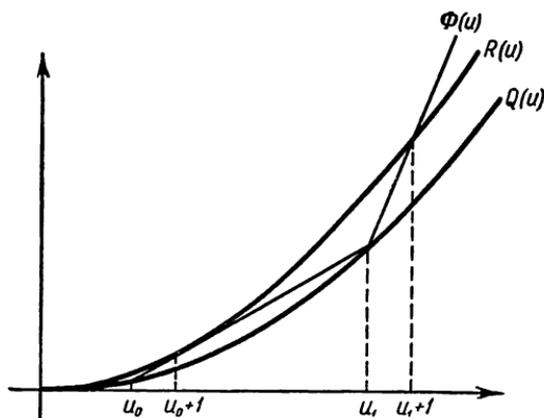
Построенные функции $Q(u)$ и $R(u)$ обладают, как легко видеть, следующим свойством: каждому $n = 1, 2, \dots$ соответствует такое u_n^* , что при $u > u_n^*$

$$Q(u) < M\left(\frac{u}{n}\right) < M(nu) < R(u). \quad (3.17)$$

В заключение параграфа покажем, что каждой N -функции $M(u)$ соответствует такая N -функция $\Phi(u)$, что не имеет места ни соотношение $M(u) \rightarrow \Phi(u)$, ни соотношение $\Phi(u) \rightarrow M(u)$. Для этого вначале построим N -функции $Q(u)$ и $R(u)$, удовлетворяющие соотношению (3.17). Без ограничения общности можно считать, что

$$Q(u)' < R(u) \quad (u \geq u_0),$$

где u_0 — некоторое положительное число. Опишем построение графика функции $\Phi(u)$ (черт. 6).



Черт. 6.

Положим вначале $\Phi(u) = Q(u)$ при $0 \leq u \leq u_0$. Далее, проведем прямую через точки с координатами $\{u_0, Q(u_0)\}$ и $\{u_0+1, R(u_0+1)\}$. В силу свойства (1.16) эта прямая пересечет график функции $Q(u)$ еще в одной точке, абсциссу которой обозначим через u_1 . Через точки $\{u_1, Q(u_1)\}$ и $\{u_1+1, R(u_1+1)\}$ проведем новую прямую до пересечения с графиком функции $Q(u)$; абсциссу новой точки обозначим через u_2 . Продолжая этот процесс, получим ломаную,

соединяющую точки с координатами $\{u_0, Q(u_0)\}$, $\{u_1, Q(u_1)\}$, $\{u_2, Q(u_2)\}$ и т. д. Эта ломаная и будет графиком N -функции $\Phi(u)$ при $u \geq u_0$.

По построению $\Phi(u)$ обладает следующими свойствами:

$$\Phi(u_n) = Q(u_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.18)$$

и

$$\Phi(u_n + 1) = R(u_n + 1) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Допустим, что $\Phi(u) \rightarrow M(u)$. Тогда найдутся такие k и $u^* > 0$, что

$$\Phi(u) \leq M(ku) \quad (u \geq u^*). \quad (3.20)$$

В силу (3.17) найдется такое $u_n > u^*$, что

$$M[k(u_n + 1)] < R(u_n + 1).$$

Тогда в силу (3.19)

$$M[k(u_n + 1)] < \Phi(u_n + 1),$$

что противоречит (3.20).

Аналогично доказывается, что не имеет места соотношение $M(u) \rightarrow \Phi(u)$.

Предоставляем читателю показать, что для любой последовательности N -функций $M_n(u)$ ($n = 1, 2, \dots$) существуют такие N -функции $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$, что $\Phi(u) \rightarrow M_n(u) \rightarrow \Psi(u)$, причем $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ не эквивалентны ни одной из функций $M_n(u)$.

§ 4. Δ_2 -условие

1. Определение. Говорят, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при больших значениях u , если существуют такие постоянные $k > 0$, $u_0 \geq 0$, что

$$M(2u) \leq kM(u) \quad (u \geq u_0). \quad (4.1)$$

Легко видеть, что всегда $k > 2$, так как в силу (1.15) при $u \neq 0$

$$M(2u) > 2M(u).$$

Δ_2 -условие эквивалентно выполнению при больших значениях u неравенства

$$M(lu) \leq k(l)M(u), \quad (4.2)$$

где l может быть любым числом больше единицы.

Пусть, действительно, $2^n \geq l$. Тогда из (4.1) при $u \geq u_0$ следует:

$$M(lu) \leq M(2^n u) \leq k^n M(u) = k(l) M(u).$$

Наоборот, если $2 \leq l^n$, то из (4.2) следует:

$$M(2u) \leq M(l^n u) \leq k^n(l) M(u).$$

Простым примером функций, удовлетворяющих Δ_2 -условию при всех значениях u , могут служить N -функции $M(u) = a|u|^\alpha$ ($\alpha > 1$), так как

$$M(2u) = a2^\alpha |u|^\alpha = 2^\sigma M(u).$$

Очевидно, Δ_2 -условие при больших значениях u выполняется, если

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty. \quad (4.3)$$

Нетрудно также видеть, что выполнение Δ_2 -условия при всех u , т. е. выполнение неравенства (4.1) при всех $u \geq 0$, эквивалентно условию (4.3) и условию

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow 0} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty. \quad (4.4)$$

Если $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то этому условию удовлетворяет и любая N -функция, эквивалентная $M(u)$. Пусть, действительно, $M_1(u) \sim M(u)$. Это значит, что найдутся такие числа $\alpha < \beta$ и $u_1 \geq 0$, что

$$M(\alpha u) \leq M_1(u) \leq M(\beta u) \quad (u \geq u_1).$$

Следовательно, при $u \geq \max\{u_0, u_1\}$

$$M_1(2u) \leq M(2\beta u) \leq k\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right) M(\alpha u) \leq k\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right) M_1(u).$$

Отметим, что в каждом классе эквивалентных N -функций, удовлетворяющих Δ_2 -условию, имеются N -функции, удовлетворяющие неравенству (4.1) при всех u . Действительно, пусть $M(u)$ удовлетворяет неравенству (4.1) при

$u \geq u_0$. Как и при доказательстве теоремы 3.3, определим N -функцию $M_1(u)$ равенством

$$M_1(u) = \begin{cases} \frac{M(u_0)}{u_0^\alpha} |u|^\alpha & \text{при } |u| \leq u_0, \\ M(u) & \text{при } |u| \geq u_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\alpha = \frac{u_0 p(u_0)}{M(u_0)} > 1$. Тогда при всех u

$$M_1(2u) \leq \max \{ 2^\alpha, k \} M_1(u).$$

2. Признаки Δ_2 -условия.

Теорема 4.1. *Для того чтобы N -функция $M(u)$ удовлетворяла Δ_2 -условию, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие постоянные α и $u_0 > 0$, что при $u \geq u_0$*

$$\frac{up(u)}{M(u)} < \alpha, \quad (4.6)$$

где $p(u)$ — правая производная N -функции $M(u)$.

Доказательство. Так как всегда $up(u) > M(u)$, то $\alpha > 1$. Пусть $u \geq u_0$. Тогда из (4.6) получим:

$$\int_u^{2u} \frac{p(t)}{M(t)} dt < \alpha \int_u^{2u} \frac{dt}{t} = \alpha \ln 2$$

или, что то же, $M(2u) < 2^\alpha M(u)$. Таким образом, достаточность условия (4.6) доказана.

Пусть теперь при $u \geq u_0$

$$M(2u) \leq kM(u).$$

Тогда

$$kM(u) \geq M(2u) = \int_0^{2u} p(t) dt > \int_u^{2u} p(t) dt > up(u),$$

т. е. при $u \geq u_0$ выполняется неравенство (4.6).

Теорема доказана.

Из доказательства видно, что $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при всех $u > 0$, если неравенство (4.6) выполнено при всех $u > 0$.

Теорема 4.1 позволяет просто доказать, что N -функции $M(u)$, удовлетворяющие Δ_2 -условию, растут не быстрее

степенных. Действительно, при выполнении Δ_2 -условия из (4.6) следует, что

$$\int_{u_0}^u \frac{p(t)}{M(t)} dt < \alpha \int_{u_0}^u \frac{dt}{t},$$

т. е. что при $u \geq u_0$

$$M(u) < \frac{M(u_0)}{u_0^\alpha} u^\alpha. \quad (4.7)$$

Нетрудно проверить, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если ее правая производная $p(u)$ удовлетворяет неравенству

$$p(2u) \leq lp(u) \quad (u \geq u_0), \quad (4.8)$$

где $l > 1$, $u_0 \geq 0$.

Неравенство (4.8), в частности, выполняется, если функция $p(u)$ при больших значениях аргумента вогнута, т. е. при больших u_1 и u_2

$$p\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \geq \frac{p(u_1) + p(u_2)}{2}.$$

3. Δ_2 -условие для дополнительной N -функции. Нас часто будет интересовать следующий вопрос: как непосредственно по заданной N -функции $N(v)$ узнать, удовлетворяет ли Δ_2 -условию дополнительная к ней N -функция $M(u)$?

Теорема 4.2. Для того чтобы дополнительная к N -функции $N(v)$ функция $M(u)$ удовлетворяла Δ_2 -условию, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие постоянные $l > 1$ и $v_0 \geq 0$, что

$$N(v) \leq \frac{1}{2l} N(lv) \quad (v \geq v_0). \quad (4.9)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (4.9). Положим $N_1(v) = \frac{1}{2l} N(lv)$. В силу равенства (2.5) дополнительная к $N_1(v)$ N -функция $M_1(u)$ определится равенством $M_1(u) = \frac{1}{2l} M(2u)$. Неравенство (4.9) можно переписать в виде

$$N(v) \leq N_1(v).$$

Отсюда в силу теоремы 2.1 следует, что при больших значениях аргумента

$$M_1(u) \leq M(u)$$

или, что то же,

$$M(2u) \leq 2IM(u).$$

Аналогично доказывается, что из (4.1) вытекает (4.9).

Теорема доказана.

Если (4.9) выполняется при всех $v > 0$, то и $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при всех u .

Как было отмечено в предыдущем пункте, N -функция удовлетворяет Δ_2 -условию, если ее производная при больших значениях аргумента вогнута. Функция, очевидно, является вогнутой, если обратная к ней функция выпукла. Таким образом, N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если дополнительная к ней N -функция $N(v)$ имеет выпуклую производную.

Для доказательства очередной теоремы нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. Пусть функции $p(u)$ и $q(v)$ непрерывны. Тогда для выполнения неравенства (4.6) необходимо и достаточно, чтобы при больших значениях v выполнялось неравенство

$$\frac{vq(v)}{N(v)} > \frac{\alpha}{\alpha-1}. \quad (4.10)$$

Доказательство. Покажем, например, что из (4.6) следует (4.10). В силу (2.7)

$$M(u) = up(u) - N[p(u)].$$

Поэтому из (4.6) следует, что

$$\frac{up(u)}{up(u) - N[p(u)]} < \alpha \quad (u \geq u_0),$$

откуда

$$\frac{up(u)}{N[p(u)]} > \frac{\alpha}{\alpha-1} \quad (u \geq u_0). \quad (4.11)$$

Положив в этом неравенстве $u = q(v)$ (в силу непрерывности функций $p(u)$ и $q(v)$ при этом будет $p(u) = v$), получим (4.10). Аналогично доказывается, что из (4.10) следует (4.6).

Лемма доказана.

* Из доказанной леммы и теоремы 4.1 следует теорема 4.3.

Теорема 4.3. Пусть N -функция $N(v)$ имеет при больших значениях v монотонно возрастающую непрерывную производную.

Тогда дополнительная к ней N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию в том и только том случае, если при больших значениях v выполняется неравенство

$$\frac{vq(v)}{N(v)} > \alpha_1, \quad (4.12)$$

где $\alpha_1 > 1$.

Для доказательства достаточно заметить, что непрерывность функции $p(u)$ следует из монотонности функции $q(v)$.

Как и в случае теоремы 4.1, N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при всех u , если неравенство (4.12) выполняется при всех $u > 0$.

4. Примеры. Как мы уже отмечали, Δ_2 -условию при всех значениях u удовлетворяют N -функции $M(u) = a|u|^\alpha$ ($\alpha > 1$).

В качестве следующего примера рассмотрим N -функцию

$$M(u) = |u|^\alpha (|\ln |u|| + 1). \quad (4.13)$$

Для этой функции при $u > 1$

$$\frac{up(u)}{M(u)} = \frac{\alpha + \alpha \ln u + 1}{\ln u + 1},$$

откуда

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{up(u)}{M(u)} = \alpha.$$

Поэтому в силу теоремы 4.1 N -функция (4.13) удовлетворяет Δ_2 -условию при больших значениях u . Непосредственный подсчет показывает, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(2u)}{M(u)} = 2^\alpha.$$

Значит выполнены условия (4.3) и (4.4). Это означает, что N -функция (4.13) удовлетворяет Δ_2 -условию при всех u .

Предоставляем читателю показать, что и дополнительная к N -функции (4.13) N -функция удовлетворяет Δ_2 -условию. N -функция

$$N(v) = e^{|v|} - |v| - 1 \quad (4.14)$$

не удовлетворяет Δ_2 -условию, так как она растет быстрее любой степенной. Производная функции $N(v)$ равна $e^v - 1$ ($v \geq 0$), она выпукла. Из сделанного в предыдущем пункте замечания следует, что дополнительная к $N(v)$ функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Нетрудно было бы проверить, что функция $N(v)$ удовлетворяет условию (4.9). Выполнение Δ_2 -условия для функции $M(u)$, дополнительной к N -функции (4.14), можно проверить и непосредственно, так как известно ее выражение в явном виде (см. (2.10)):

$$M(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|.$$

При этом нетрудно видеть, что Δ_2 -условие выполняется при всех u .

Рассмотрим теперь N -функцию

$$N(v) = e^{v^2} - 1, \quad (4.15)$$

для которой дополнительную функцию $M(u)$ в явном виде найти не удастся. Однако и для нее нетрудно показать, что $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при всех значениях аргумента. Воспользуемся для этого теоремой 4.2.

Заметим прежде всего, что функция $\varphi(t) = e^{4t} - 4e^t + 3$ монотонно возрастает при $t > 0$, так как $\varphi'(t) = 4e^t(e^{3t} - 1) > 0$. Следовательно, при $v > 0$

$$\frac{e^{4v^2} - 1}{4} > e^{v^2} - 1.$$

Последнее неравенство является условием (4.9) для функции (4.15) при $l = 2$.

При рассмотрении предыдущих примеров могло возникнуть предположение, что по крайней мере одна из двух дополнительных друг к другу N -функций удовлетворяет Δ_2 -условию. Кроме того, могло возникнуть предположение, что каждая N -функция, растущая медленнее степенной, удовлетворяет Δ_2 -условию. Приведем пример, который показывает, что оба эти предположения неверны.

N -функцию $M(u)$ построим, задав ее производную $p(t)$ равенством

$$p(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1) \\ k!, & \text{если } t \in [(k-1)!, k!) \quad (k = 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Для того чтобы доказать, что N -функция $M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, достаточно показать, что существует такая последовательность чисел $u_n \rightarrow \infty$, что

$$M(2u_n) > n M(u_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.16)$$

Пусть

$$u_n = n! \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$M(2u_n) > \int_{n!}^{2n!} p(t) dt > (n+1)! \cdot n!,$$

а

$$n M(u_n) = n \int_0^{n!} p(t) dt < n \cdot n! \cdot n!,$$

откуда и следует (4.16).

Очевидно, функция $q(s)$ определится равенством

$$q(s) = \begin{cases} s, & \text{если } s \in [0, 1), \\ (k-1)!, & \text{если } s \in [(k-1)!, k!] \quad (k = 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Покажем, что N -функция $N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds$ также не удовлетворяет Δ_2 -условию. Для этого рассмотрим последовательность чисел $v_n = n!$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда

$$N(2v_n) > \int_{n!}^{2n!} q(s) ds > n! n!,$$

а

$$n N(v_n) = n \int_0^{n!} q(s) ds < n \cdot n! (n-1)! = n! \cdot n!,$$

т. е. $N(2v_n) > nN(v_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). При этом функция $N(v)$ растет не быстрее $\frac{v^2}{2}$, так как $q(s) \leq s$ ($s \geq 0$).

§ 5. Δ' -условие

1. Определение. Говорят, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, если существуют такие положительные постоянные c и u_0 , что

$$M(uv) \leq c M(u) M(v) \quad (u, v \geq u_0). \quad (5.1)$$

Лемма 5.1. Если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, то она удовлетворяет и Δ_2 -условию.

Доказательство. Пусть $k = cM(u_0 + 2)$. Тогда при $u \geq u_0 + 2$

$$M(2u) \leq M[(u_0 + 2)u] \leq cM(u_0 + 2)M(u) = kM(u).$$

Лемма доказана.

Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, а N -функция $M_1(u)$ эквивалентна $M(u)$. Покажем, что тогда и $M_1(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, т. е. что Δ' -условие есть свойство класса эквивалентных друг другу N -функций. Так как $M(u) \sim M_1(u)$, то существуют такие положительные постоянные k_1, k_2 и u_1 , что

$$M(k_1 u) \leq M_1(u) \leq M(k_2 u) \quad (u \geq u_1). \quad (5.2)$$

Удобно считать, что $k_1 < 1, u_0, u_1, k_2 > 1$.

В силу леммы 5.1 найдутся такие $k_3 > 0$ и $u_2 \geq 0$, что

$$M\left(\frac{\sqrt{k_2}}{k_1} u\right) \leq k_3 M(u) \quad (u \geq u_2). \quad (5.3)$$

Следовательно, при $u, v \geq \max\left\{u_0, u_1, \frac{u_2}{k_1}\right\}$

$$\begin{aligned} M_1(uv) &\leq M(k_2 uv) < cM(\sqrt{k_2}u)M(\sqrt{k_2}v) \leq \\ &\leq ck_3^2 M(k_1 u)M(k_1 v) \leq ck_3^2 M_1(u)M_1(v). \end{aligned}$$

Нам неизвестно, существует ли в каждом классе эквивалентных N -функций, удовлетворяющих Δ' -условию, такая функция, которая удовлетворяет этому условию при всех u, v .

Необходимо отметить, что класс N -функций, удовлетворяющих Δ' -условию, существенно уже класса N -функций, удовлетворяющих Δ_2 -условию. Рассмотрим, например, функцию $M(u) = \frac{u^2}{\ln(e + |u|)}$. Она является N -функцией, так как

ее производная $p(u) = \frac{2u(u+e)\ln(u+e) - u^2}{(u+e)\ln^2(u+e)}$ ($u \geq 0$) удовлетворяет условиям (1.13) и монотонно возрастает. В доказательстве нуждается только последнее утверждение; оно следует из того, что

$$p'(u) = \frac{2}{(u+e)^2 \ln^3(u+e)} \left[(u+e)^2 \ln^2(u+e) - \right. \\ \left. - 2u(u+e)\ln(u+e) + u^2 + \frac{u^2 \ln(u+e)}{2} \right] > \\ > \frac{2}{(u+e)^2 \ln^3(u+e)} [(u+e)\ln(u+e) - u]^2 \geq 0 \quad (u > 0).$$

N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, так как

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} = 4.$$

Эта функция не удовлетворяет Δ' -условию, так как

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u^2)}{M^2(u)} = \infty.$$

2. Достаточные признаки выполнения Δ' -условия.

Теорема 5.1. Пусть существует такое число $u_0 > 1$, что при каждом фиксированном $u \geq u_0$ функция

$$h(t) = \frac{p(ut)}{p(t)}$$

не возрастает при $t \geq u_0$.

Тогда N -функция

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$$

удовлетворяет Δ' -условию.

Доказательство. Пусть $u, v \geq u_0$. Тогда по условию теоремы

$$\frac{p(ut)}{p(t)} \leq \frac{p(uv_0)}{p(v_0)} \quad (t \geq u_0).$$

Используя это неравенство в выражении

$$M(uv) = \int_0^{uv} p(t) dt = u \int_0^v p(ut) dt = u \int_0^{u_0} p(ut) dt + u \int_{u_0}^v p(ut) dt,$$

получим:

$$\begin{aligned} M(uv) &\leq u u_0 p(u u_0) + u \frac{p(u u_0)}{p(u_0)} \int_0^v p(t) dt = \\ &= u u_0 p(u u_0) \left[1 + \frac{M(v)}{u_0 p(u_0)} \right], \end{aligned}$$

и так как

$$u u_0 p(u u_0) < \frac{1}{u_0 - 1} \int_{u u_0}^{u_0^2} p(t) dt \leq \frac{1}{u_0 - 1} \int_0^{u_0^2} p(t) dt = \frac{M(u u_0^2)}{u_0 - 1},$$

то

$$M(uv) \leq \frac{M(u u_0^2)}{u_0 - 1} \left[1 + \frac{M(v)}{u_0 p(u_0)} \right]. \quad (5.4)$$

Из последнего неравенства вытекает, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Действительно, из (5.4) при $u = u_0$ вытекает, что

$$M(u_0 v) \leq \frac{2M(u_0^3)}{(u_0 - 1) u_0 p(u_0)} M(v)$$

при $v \geq v_0$, где v_0 — такое число, что $M(v_0) > u_0 p(u_0)$.

В силу Δ_2 -условия найдется такое $k > 0$, что и $u \geq v_0$

$$M(u u_0^2) \leq k M(u).$$

Значит, из (5.4) вытекает, что

$$M(uv) \leq \frac{2k}{(u_0 - 1) u_0 p(u_0)} M(u) M(v) \quad (u, v \geq v_0).$$

Теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $p(t)$ дифференцируема при больших значениях t .

Лемма 5.2. Функция

$$h(t) = \frac{p(ut)}{p(t)}$$

не возрастает при фиксированном $u \geq u_0 > 1$ при $t \geq u_0$, если функция

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)}$$

не возрастает при $t \geq u_0$.

Доказательство. Функция $h(t)$ не возрастает при $t \geq u_0$ тогда и только тогда, когда ее производная

$$h'(t) = \frac{up'(ut)p(t) - p'(t)p(ut)}{p^2(t)}$$

не положительна при $t \geq u_0$, т. е. тогда, когда

$$\frac{up'(ut)}{p(ut)} \leq \frac{p'(t)}{p(t)}.$$

Последнее неравенство непосредственно следует из условия леммы.

Лемма доказана.

Из этой леммы и теоремы 5.1 следует

Теорема 5.2. Пусть при больших значениях t функция $p(t)$ дифференцируема и функция

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)} \quad (5.5)$$

не возрастает.

Тогда N -функция

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$$

удовлетворяет Δ' -условию.

3. Δ' -условие для дополнительной функции.

Теорема 5.3. Пусть производная $p(u)$ N -функции $M(u)$ дифференцируема при $u \geq u_0 > 1$, причем функция

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)}$$

не убывает при $t \geq u_0$.

Тогда N -функция

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds,$$

дополнительная к N -функции $M(u)$, удовлетворяет Δ' -условию.

Доказательство. Так как функция $g(t)$ не убывает, то при достаточно больших t она принимает положительные значения. Значит, при больших значениях аргумента $p'(t) > 0$, откуда вытекает дифференцируемость функции $q(s)$, обратной к функции $p(t)$.

В силу леммы 5.2 для доказательства теоремы достаточно показать, что найдется такое $s_0 > 1$, что при $s \geq s_0$ функция

$$g_1(s) = \frac{sq'(s)}{q(s)}$$

не возрастает.

Положим $s = p(t)$. Тогда при $t > t_0 = \max\{u_0, q(1)\}$, $s > s_0 = p(t_0) > 1$ имеем:

$$q'(s) = \frac{1}{p'(t)},$$

$$g_1(s) = \frac{sq'(s)}{q(s)} = \frac{p(t)}{tp'(t)} = \frac{1}{g(t)},$$

а так как функция $g(t)$ не убывает, то функция $g_1(s)$ не возрастает. Теорема доказана.

В следующем параграфе будет выделен специальный класс N -функций, дополнительные к которым удовлетворяют Δ' -условию.

4. Примеры. Если

$$M_1(u) = \frac{u |^\alpha}{\alpha} \quad (\alpha > 1),$$

то, очевидно, при всех u, v

$$M_1(uv) = \alpha M_1(u) M_1(v),$$

т. е. $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию.

Второй пример N -функции, удовлетворяющей Δ' -условию при всех u, v , дает N -функция

$$M_2(u) = |u|^\alpha (|\ln |u|| + 1) \quad (\alpha > 1).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} M_2(uv) &= |uv|^\alpha (|\ln |uv|| + 1) \leq \\ &\leq |u|^\alpha |v|^\alpha (|\ln |u|| + |\ln |v|| + 1) \leq \\ &\leq |u|^\alpha (|\ln |u|| + 1) \cdot |v|^\alpha (|\ln |v|| + 1) = M_2(u) M_2(v). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь N -функцию

$$M_3(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|.$$

Выпуклая при больших значениях u функция

$$Q(u) = u \ln u$$

удовлетворяет условию (3.6). В силу теоремы 3.3 функция $Q(u)$ является главной частью некоторой N -функции $\Phi(u)$: гл. ч. $\Phi(u) = Q(u)$.

Функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ' -условию в силу теоремы 5.2, так как для нее

$$g(t) = \frac{\ln t + 1}{\ln t} = 1 + \frac{1}{\ln t}.$$

N -функции $\Phi(u)$ и $M_3(u)$ удовлетворяют условию (3.4) и, следовательно, эквивалентны. Значит, и N -функция $M_3(u)$ удовлетворяет Δ' -условию.

Оказывается, что N -функция $M_3(u)$ удовлетворяет Δ' -условию не при всех u, v . Действительно, если бы существовала такая постоянная c , что при всех u, v

$$M(uv) \leq cM(u)M(v),$$

то значения функции

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{M(u)M(v)}{M(uv)} = \\ &= \frac{[(1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|] [(1 + |v|) \ln(1 + |v|) - |v|]}{(1 + |uv|) \ln(1 + |uv|) - |uv|} \end{aligned}$$

были бы ограничены снизу положительным числом $\frac{1}{c}$. Но если положить $u = n, v = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то легко проверить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(n, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

В качестве последнего примера укажем, что Δ' -условию удовлетворяет N -функция $N(v)$, дополнительная к N -функции

$$M(u) = (1 + |u|)^{\sqrt{\ln(1 + |u|)}} - 1,$$

что можно проверить, воспользовавшись теоремой 5.3. Для $M(u)$ функция

$$g(t) = \frac{tP'(t)}{P(t)} = \left[\frac{3}{2} \sqrt{\ln(1+t)} - 1 + \frac{1}{2\ln(1+t)} \right] \frac{1}{1+t}$$

при больших значениях t возрастает, так как ее производная

$$g'(t) = \frac{t}{(1+t)^2} \left[\frac{3}{2\sqrt{\ln(1+t)}} - \frac{1}{2\ln^2(1+t)} \right] + \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{3}{2}\sqrt{\ln(1+t)} - 1 + \frac{1}{2\ln(1+t)} \right]$$

положительна.

§ 6. N -функции, растущие быстрее степенных

1. Δ_3 -условие. Будем говорить, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию, если она эквивалентна N -функции $|u| M(u)$. Так как при $u > 1$ всегда $|u| M(u) > M(u)$, то Δ_3 -условие означает, что при значениях u , больших некоторого u_0 ,

$$|u| M(u) < M(ku), \tag{6.1}$$

где k — некоторая постоянная.

Если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию, то, как легко видеть, этому условию удовлетворяют и все N -функции, эквивалентные $M(u)$.

Примерами N -функций, удовлетворяющих Δ_3 -условию, могут служить N -функции $M(u)$ с главными частями e^u , e^{u^2} , $u^{\ln u}$ и т. д., так как для них выполнение условия (6.1) очевидно.

Во всех приведенных примерах N -функции $M(u)$ растут быстрее любой степенной. Это не случайно, так как каждая N -функция $M(u)$, удовлетворяющая Δ_3 -условию, растет быстрее любой степенной u^n . Действительно, в силу (6.1) при $u \geq u_0 k^n$

$$\begin{aligned} M(u) &> \frac{u}{k} M\left(\frac{u}{k}\right) > \frac{u^2}{k^2} M\left(\frac{u}{k^2}\right) > \dots > \\ &> \frac{u^n}{k^{\frac{n(n+1)}{2}}} M\left(\frac{u}{k^n}\right) > \frac{M(u_0)}{k^{\frac{n(n+1)}{2}}} u^n. \end{aligned}$$

Однако не все N -функции, растущие быстрее любой степенной, удовлетворяют Δ_3 -условию. Например, этому

условию не удовлетворяет N -функция $M(u)$, для которой гл. ч. $M(u) = u^{\sqrt[1/a]{u}}$, так как для нее при любом $k > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(ku)}{u |M(u)|} = 0.$$

2. Оценки для дополнительной функции.

Теорема 6.1. Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию.

Тогда дополнительная к ней N -функция $N(v)$ удовлетворяет при больших значениях v неравенствам

$$k_1 v M^{-1}(k_1 v) \leq N(v) \leq k_2 v M^{-1}(k_2 v), \quad (6.2)$$

где $M^{-1}(v)$ — функция, обратная к функции $M(u)$, $k_1 \leq k_2$ — постоянные.

Доказательство. Покажем прежде всего, что N -функция

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} M(t) dt$$

эквивалентна N -функции $M(u)$. Действительно, по условию теоремы при больших u

$$M_1(u) = \int_0^u M(t) dt < uM(u) \leq M(ku),$$

где k — некоторая постоянная. С другой стороны, при $u > 1$

$$M_1(2u) = \int_0^{2u} M(t) dt > \int_u^{2u} M(t) dt > uM(u) > M(u).$$

Таким образом, $M_1(u) \sim M(u)$.

Поэтому и функция $N_1(v)$, дополнительная к $M_1(u)$, эквивалентна $N(v)$. Функция $N_1(v)$ находится непосредственно:

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} M^{-1}(t) dt. \quad (6.3)$$

Из последнего равенства следует, что

$$N_1(v) < |v| M^{-1}(|v|)$$

и

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} M^{-1}(t) dt > \int_{\frac{|v|}{2}}^{|v|} M^{-1}(t) dt > \frac{|v|}{2} M^{-1}\left(\frac{|v|}{2}\right).$$

Из последних неравенств и того, что $N_1(v) \sim N(v)$, следует (6.2).

Теорема доказана.

Заметим, что левое неравенство (6.2) справедливо при достаточно больших v для любой функции $M(u)$ (без предположения о Δ_3 -условии) с любой постоянной $k_1 < 1$. Действительно, из неравенства Юнга вытекает, что при больших v

$$k_1 v M^{-1}(k_1 v) \leq k_1 N(v) + k_1^2 v < N(v).$$

3. Построение N -функций, эквивалентных дополнительным. Как мы уже отмечали, построение в явном виде дополнительных N -функций возможно лишь в редких случаях. Однако для приложений во многих случаях знание точных формул для дополнительной функции не обязательно — достаточно знать формулы для какой-нибудь N -функции, эквивалентной искомой. Оказывается, что для некоторых классов N -функций могут быть указаны формулы для N -функций, эквивалентных к дополнительным. Один из таких классов выделяется при помощи Δ_3 -условия.

Из теоремы 6.1 непосредственно вытекает

Теорема 6.2. Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию и пусть функция $Q(v) = |v| M^{-1}(|v|)$ является главной частью некоторой N -функции $\Psi(v)$.

Тогда $\Psi(v) \sim N(v)$.

Для того чтобы функция $Q(v)$ была главной частью некоторой N -функции, достаточно, чтобы функция $Q'(v)$ монотонно возрастала к бесконечности при $v \rightarrow \infty$. Так как при $v > 0$

$$Q'(v) = M^{-1}(v) + \frac{v}{p[M^{-1}(v)]},$$

то

$$\lim_{v \rightarrow \infty} Q'(v) = \infty.$$

Для того чтобы $Q'(v)$ возрастала монотонно, достаточно, чтобы $Q''(v)$ при больших значениях v была неотрицательной функцией. Последнее условие выполняется, если при больших значениях u

$$2\rho^2(u) - M(u) \rho'(u) \geq 0. \quad (6.4)$$

Это неравенство выполняется, например, для N -функций $M_1(u)$, $M_2(u)$, $M_3(u)$, для которых гл. ч. $M_1(u) = e^u$, гл. ч. $M_2(u) = e^{u^2}$, гл. ч. $M_3(u) = u^{\ln u}$. Поэтому дополнительные к ним N -функции эквивалентны соответственно N -функциям $\Psi_1(v)$, $\Psi_2(v)$, $\Psi_3(v)$, для которых

$$\begin{aligned} \text{гл. ч. } \Psi_1(v) &= v \ln v, \quad \text{гл. ч. } \Psi_2(v) = v \sqrt{\ln v}, \\ \text{гл. ч. } \Psi_3(v) &= v^{1 + \frac{1}{\sqrt{\ln v}}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Выше мы показали, что N -функции $M(u)$, удовлетворяющие Δ_3 -условию, растут быстрее любой степенной $|u|^\alpha$ ($\alpha > 1$). Это значит, что

$$M(u) > \frac{u^\alpha}{\alpha} \quad (u \geq u_0),$$

где u_0 — некоторое неотрицательное число. Тогда из теоремы 2.1 следует неравенство для дополнительных функций:

$$N(v) < \frac{v^\beta}{\beta} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \right).$$

Таким образом, N -функция, дополнительная к N -функции, удовлетворяющей Δ_3 -условию, растет медленнее любой степенной v^β ($\beta > 1$). Например, такими будут функции (6.5).

При рассмотрении произвольных N -функций, растущих медленнее любой степенной функции, возникает предположение, что она дополнительна к N -функции, удовлетворяющей Δ_3 -условию. Это предположение в ряде случаев удается проверить. Рассмотрим, например, N -функцию $N(v)$, для которой гл. ч. $N(v) = v (\ln v)^2$. Представим ее в виде

$$\text{гл. ч. } N(v) = v Q^{-1}(v).$$

Тогда $Q(u) = e^{\sqrt{u}}$. Очевидно, $Q(u)$ является главной частью некоторой N -функции $M_1(u)$, удовлетворяющей Δ_3 -условию. В силу теоремы 6.2 $N(v)$ эквивалентна $N_1(v)$.

Проведенные рассуждения содержат общий путь построения N -функций, эквивалентных дополнительным к широким классам заданных N -функций, растущих медленнее любой степенной. Пусть задана такая N -функция $N(v)$. Представим ее в виде $N(v) = |v| Q^{-1}(|v|)$. Если функция $Q(u)$ оказывается главной частью N -функции $M_1(u)$, удовлетворяющей Δ_3 -условию, то в силу теоремы 6.2 $M_1(u) \sim M(u)$, где $M(u)$ — N -функция, дополнительная к $N(v)$.

Возможен и другой путь построения N -функций, эквивалентной дополнительной к N -функции $N(v)$, растущей медленнее любой степенной v^β ($\beta > 1$). Пусть $q(v) = N'(v)$, причем функция $q^{-1}(u) = \text{гл. ч. } M_1(u)$, где $M_1(u)$ есть N -функция, удовлетворяющая Δ_3 -условию. Тогда, как было показано при доказательстве теоремы 6.1,

$$M_1(u) \sim M_2(u) = \int_0^{|u|} M_1(t) dt.$$

Значит, эквивалентны N -функции $N_1(v)$ и $N_2(v)$, дополнительные соответственно к $M_1(u)$ и $M_2(u)$, причем

$$N_2(v) = \int_0^{|v|} M_1^{-1}(s) ds.$$

Так как при больших значениях v $M_1^{-1}(v) = q(v)$, то $N_2(v) \sim N(v)$, откуда $M_2(u) \sim M(u)$. Следовательно, N -функция $M_1(u)$ будет искомой функцией, эквивалентной $M(u)$.

4. Суперпозиция дополнительных функций. Пусть $M(u)$ и $Q(u)$ — некоторые N -функции.

N -функции $M(u)$ и $M[Q(u)]$ никогда не эквивалентны, так как при любом $k > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M[Q(u)]}{M(ku)} = \infty.$$

Это следует из того, что при достаточно больших u

$$Q(u) > nku, \quad M(nku) > nM(ku),$$

где n — любое заданное число, откуда

$$\frac{M[Q(u)]}{M(ku)} > \frac{M(nku)}{M(ku)} > n.$$

N -функции $M(u)$ и $Q[M(u)]$, однако, могут в некоторых случаях быть эквивалентны. При этом, если $M_1(u) \sim M(u)$ и $Q_1(u) \sim Q(u)$, то функции $M_1(u)$ и $Q_1[M_1(u)]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны N -функции $M(u)$ и $Q[M(u)]$.

Сделаем еще одно очевидное замечание: если $M(u) \sim Q[M(u)]$, то $M(u) \sim Q[Q[\dots Q[M(u)]]]$.

Теорема 6.3. *Для того чтобы N -функция $M(u)$ удовлетворяла Δ_3 -условию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$N[M(u)] \sim M(u),$$

где $N(v)$ — дополнительная к $M(u)$ функция.

Доказательство. Пусть $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию. Докажем, что $N_1[M(u)] \sim M(u)$, где $N_1(v)$ — N -функция, определенная равенством (6.3). Так как $N_1(v) \sim N(v)$, то этим необходимость условия теоремы будет доказана.

По определению функции $N_1(v)$

$$N_1(v) \leq |v| M^{-1}(|v|),$$

откуда при больших значениях u

$$N_1[M(u)] \leq M(u) u \leq M(ku)$$

в силу того, что $|u| M(u) \sim M(u)$.

С другой стороны, для произвольной N -функции $N_1(v)$ при больших значениях аргумента

$$N_1[M(u)] > M(u).$$

Таким образом, $N_1[M(u)] \sim M(u)$.

Докажем достаточность условия теоремы. Пусть $N[M(u)] \sim M(u)$. Это значит, что при больших значениях аргумента $N[M(u)] \leq M(k_1 u)$. Так как в силу неравенства Юнга при больших значениях аргумента

$$v M^{-1}(v) \leq N(v) + v < 2N(v),$$

то при больших значениях u

$$u M(u) \leq 2N[M(u)] \leq 2M(k_1 u) < M(2k_1 u).$$

Таким образом, N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию.

Теорема доказана.

Пусть $M(u)$ и $Q(u)$ — две N -функции, первая из которых удовлетворяет Δ_3 -условию. Покажем, что обе суперпозиции $M[Q(u)]$ и $Q[M(u)]$ также удовлетворяют Δ_3 -условию. Это следует из очевидных цепочек неравенств, справедливых при больших значениях аргумента:

$$uM[Q(u)] \leq Q(u)M[Q(u)] \leq M[kQ(u)] \leq M[Q(ku)]$$

и

$$uQ[M(u)] \leq Q[uM(u)] \leq Q[M(ku)].$$

Б. Δ^2 -у с л о в и е. В ряде случаев функции $M(u)$ и $Q[M(u)]$ эквивалентны и тогда, когда $Q(v)$ «существенно» более быстро растущая функция, чем функция $N(v)$, дополнительная к $M(u)$. Нас в дальнейшем будет интересовать случай, когда $Q(v) = v^2$.

Будем говорить, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, если

$$M(u) \sim_{\frac{1}{2}} M^2(u),$$

т. е. если существует такое $k > 1$, что

$$M^2(u) \leq M(ku) \tag{6.6}$$

при всех достаточно больших u .

Легко видеть, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, если $M(u) \sim M^\alpha(u)$ при некотором $\alpha > 1$. Обратно, если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, то $M(u) \sim M^\alpha(u)$ при любом $\alpha > 1$.

Непосредственно проверяется, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, если ему удовлетворяет какая-нибудь N -функция, эквивалентная $M(u)$.

Примерами функций, удовлетворяющих Δ^2 -условию, могут служить N -функции с главными частями e^u , e^{u^2} и т. д.

Если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, то она удовлетворяет и Δ_3 -условию. Действительно, из Δ^2 -условия вытекает существование такого $k > 1$, что $M(ku) \geq M^2(u)$ при больших значениях u , и так как $M(u) > u$ при больших значениях u , то $M(ku) > uM(u)$, т. е. выполнено неравенство (6.1). Это и означает, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию.

Однако класс N -функций, удовлетворяющих Δ_3 -условию, шире класса N -функций, удовлетворяющих Δ^2 -условию. Например, N -функция $M(u)$ с главной частью $u^{\ln u}$

удовлетворяет Δ_3 -условию, но не удовлетворяет Δ^2 -условию, так как при любом $k > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{2 \ln u}}{(ku)^{\ln(ku)}} = \infty.$$

Выше мы показали, что каждая N -функция, удовлетворяющая Δ_2 -условию, растет медленнее некоторой степенной функции. Этот факт справедлив не только для N -функций. Пусть, действительно, $f(u)$ — произвольная неотрицательная неубывающая функция, удовлетворяющая при $u \geq u_0$ неравенству

$$f(2u) \leq kf(u).$$

Тогда из $2^n u_0 < u \leq 2^{n+1} u_0$ следует, что $k^n < \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\ln_2 k}$

и

$$f(u) \leq k^{n+1} f(u_0) \leq kf(u_0) \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\ln_2 k}.$$

Рассмотрим теперь неубывающую функцию $f(u)$, удовлетворяющую при $u \geq u_0$ неравенству

$$2f(u) < f(ku). \quad (6.7)$$

Очевидно, $k > 1$. Пусть $k^n u_0 < u \leq k^{n+1} u_0$. Тогда $2^n \geq \left(\frac{u}{ku_0}\right)^{\ln_k 2}$ и

$$f(u) > f(k^n u_0) > 2^n f(u_0) \geq f(u_0) \left(\frac{u}{ku_0}\right)^{\ln_k 2}.$$

Таким образом, из (6.7) вытекает, что при больших значениях u

$$f(u) > u^\alpha, \quad (6.8)$$

где $\alpha < \ln_k 2$.

Лемма 6.1. Пусть положительная неубывающая функция $p(u)$ при больших значениях аргумента больше единицы и удовлетворяет неравенству

$$p^2(u) < p(ku). \quad (6.9)$$

Тогда существует такое $\alpha > 0$, что при больших значениях u

$$p(u) > e^{u^\alpha}.$$

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что функция $f(u) = \ln p(u)$ удовлетворяет неравенству (6.7). Поэтому она удовлетворяет неравенству (6.8), т. е.

$$\ln p(u) > u^\alpha.$$

Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает, что каждая N -функция, удовлетворяющая Δ^2 -условию, при больших значениях аргумента растет быстрее, чем некоторая функция e^{u^α} .

Теорема 6.4. Пусть правая производная $p(u)$ N -функции $M(u)$ удовлетворяет условию (6.9) при $u \geq u_0$.

Тогда $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию.

Доказательство. В силу леммы 6.1 можно считать, что $2u < p(ku)$ при $u \geq u_0$. Поэтому при $u \geq u_0$

$$2up^2(u) < 2up(ku) < p^2(ku) < p(k^2u).$$

Отсюда и из неравенства $M(u) < up(u)$ следует, что при $u > u_0$

$$\begin{aligned} M^2(u) &= 2 \int_0^u M(t) p(t) dt \leq M^2(u_0) + 2 \int_{u_0}^u tp^2(t) dt < \\ &< M^2(u_0) + \int_0^u p(k^2t) dt < M^2(u_0) + M(k^2u). \end{aligned}$$

При больших значениях u $M^2(u_0) < M(k^2u)$. Поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$M^2(u) < 2M(k^2u) < M(2k^2u).$$

Теорема доказана.

Как уже было отмечено, N -функции, удовлетворяющие Δ^2 -условию, растут быстрее, чем некоторые функции вида e^{u^α} ($\alpha > 0$). Оказывается, что обратное не имеет места. Предоставляем читателю построить пример такой N -функции, которая растет быстрее некоторой функции e^{u^α} ($\alpha > 0$) и не удовлетворяет ни Δ^2 -условию, ни Δ_3 -условию.

Простой признак того, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, дает следующее утверждение.

Пусть найдется такое $\alpha > 0$, что функция

$$\varphi(u) = \frac{\ln M(u)}{u^\alpha} \quad (6.10)$$

не убывает при значениях u , больших некоторого u_0 . Тогда N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию. Действительно, пусть $u \geq u_0$. Тогда

$$M^2(u) = e^{2 \ln M(u)} = e^{2u^\alpha \frac{\ln M(u)}{u^\alpha}} \leq e^{2u^\alpha \frac{\ln M(2^\sigma u)}{2u^\alpha}} = M(2^\sigma u).$$

Так как, кроме того, при достаточно больших значениях u

$$M(u) < M^2(u),$$

то

$$M(u) \sim M^2(u),$$

что и требовалось доказать.

Как мы отмечали, обе суперпозиции $M[Q(u)]$ и $Q[M(u)]$ N -функций $M(u)$ и $Q(u)$ удовлетворяют Δ_3 -условию, если этому условию удовлетворяет N -функция $M(u)$. Предположим теперь, что $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию. Тогда $M[Q(u)]$ также удовлетворяет Δ^2 -условию, так как при больших значениях u

$$M^2[Q(u)] < M[kQ(u)] < M[Q(ku)].$$

Оказывается, что N -функция $Q[M(u)]$ при этом может не удовлетворять Δ^2 -условию. Более того, какова бы ни была функция $M(u)$, всегда можно построить такую функцию $Q(u)$, что $Q[M(u)]$ не удовлетворяет Δ^2 -условию.

Пусть

$$0 < v_0 < M(v_0) < v_1 < M(v_1) < \dots < v_n < M(v_n) < \dots$$

Определим N -функцию $Q(u)$, положив ее равной u^2 при $0 < u < M(v_0)$ и определив ее как линейную функцию $Q(v_{n+1}) + k_n[u - M(v_{n-1})]$ на каждом отрезке $M(v_{n-1}) \leq u \leq M(v_n)$. Угловые коэффициенты k_n выбираем так, чтобы они возрастали, — это обеспечит выпуклость функции $Q(u)$. Более того, будем требовать, чтобы эти угловые

коэффициенты возрастали настолько быстро, чтобы при всех n выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} \left\{ Q(v_{n-1}) + k_n [v_n - M(v_{n-1})] \right\}^2 > \\ > Q(v_{n-1}) + k_n [M(v_n) - M(v_{n-1})]. \end{aligned}$$

Тогда *N*-функция $Q(u)$ будет удовлетворять неравенствам

$$Q^2(v_n) > Q[M(v_n)] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Положим $v_n = M(u_n)$. Без ограничения общности можно считать, что $M(u_n) > nu_n$. Тогда из полученных неравенств вытекает, что

$$Q^2[M(u_n)] > Q\{M[M(u_n)]\} > Q[M(nu_n)].$$

Значит, суперпозиция $Q[M(u)]$ не удовлетворяет Δ^2 -условию.

6. Свойства дополнительных функций.

Теорема 6.5. Пусть *N*-функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_3 -условию.

Тогда *N*-функция $N(v)$, дополнительная к $M(u)$, удовлетворяет Δ_2 -условию.

Доказательство. Пусть k_1 и k_2 — постоянные, фигурирующие в (6.2). Так как функция $M^{-1}(v)$ вогнута и $\frac{2k_2}{k_1} > 1$, то

$$M^{-1}\left(\frac{2k_2}{k_1} v\right) < \frac{2k_2}{k_1} M^{-1}(v).$$

Следовательно, в силу (6.2) при больших значениях v

$$N(2v) \leq 2k_2 v M^{-1}(2k_2 v) < 2k_2 v \cdot \frac{2k_2}{k_1} M^{-1}(k_1 v) \leq \left(\frac{2k_2}{k_1}\right)^2 N(v),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 6.6. Пусть *N*-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию.

Тогда дополнительная к ней *N*-функция $N(v)$ удовлетворяет Δ' -условию.

Доказательство. Так как $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, то найдутся такие постоянные t_0 , k , что при $t \geq t_0$

$$M(kt) \geq M^2(t).$$

Без ограничения общности можно считать, что $t_0 > 1$.

Пусть $t \gg s \gg t_0$. Тогда

$$M(ks) > M(kt) > M^2(t) \gg M(t) M(s).$$

Полагая в последнем неравенстве $t = M^{-1}(u)$, $s = M^{-1}(v)$, получим, что при $u, v \gg M(t_0)$

$$M^{-1}(uv) \leq kM^{-1}(u) M^{-1}(v).$$

В последнее неравенство u и v входят симметрично, поэтому оно справедливо при всех $u, v \gg M(t_0)$.

Так как N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, то она удовлетворяет и Δ_3 -условию. В силу (6.2) найдется такое $u_0 \gg M(t_0) + 1$, что при $u \gg u_0$ (или $v \gg u_0$)

$$k_1 u M^{-1}(k_1 u) \leq N(u) \leq k_2 u M^{-1}(k_2 u),$$

где k_1 и k_2 — некоторые постоянные. Следовательно, при $u, v \gg u_0$

$$N(uv) \leq k_2 uv M^{-1}(k_2 uv) = (\sqrt{k_2} u)(\sqrt{k_2} v) M^{-1}(\sqrt{k_2} u \sqrt{k_2} v),$$

откуда

$$N(uv) \leq k \sqrt{k_2} u M^{-1}(\sqrt{k_2} u) \sqrt{k_2} v M^{-1}(\sqrt{k_2} v),$$

и, наконец,

$$N(uv) \leq kN\left(\frac{\sqrt{k_2}}{k_1} u\right) N\left(\frac{\sqrt{k_2}}{k_1} v\right).$$

В силу предыдущей теоремы N -функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Поэтому из последнего неравенства вытекает, что при больших значениях u, v

$$N(uv) \leq cN(v)N(u),$$

где c — некоторая постоянная.

Теорема доказана.

Теорема 6.7. Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию. Для того чтобы дополнительная к ней N -функция $N(v)$ удовлетворяла Δ' -условию, необходимо и достаточно, чтобы при больших значениях u и v выполнялось неравенство

$$M(uv) \gg M(\alpha u) M(\beta v), \quad (611)$$

где α, β — некоторые числа.

Доказательство. Пусть выполнено условие (6.11). Тогда при больших u, v имеет место неравенство

$$M^{-1}(uv) \leq \frac{M^{-1}(u) M^{-1}(v)}{\alpha\beta}.$$

Из этого неравенства и теоремы 6.2 следует, что

$$\begin{aligned} N(uv) &\leq k_2 uv M^{-1}(k_2 uv) \leq \frac{k_2 uv}{\alpha\beta} M^{-1}(k_2 u) M^{-1}(v) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha\beta} N\left(\frac{k_2}{k_1} u\right) N\left(\frac{1}{k_1} v\right), \end{aligned}$$

и так как в силу теоремы 6.5 $N(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то

$$N(uv) \leq cN(u)N(v).$$

Достаточность условия (6.11) доказана.

Допустим, что $N(v)$ удовлетворяет Δ' -условию. Это в силу теоремы 6.2 означает, что при больших значениях u, v

$$uvM^{-1}(uv) \leq kuM^{-1}(u)vM^{-1}(v).$$

Отсюда следует, что при больших значениях аргументов

$$M(kuv) \geq M(u)M(v).$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы и теоремы 6.6 вытекает, что неравенство (6.11) выполняется для N -функций, удовлетворяющих Δ^2 -условию. Имеет место более сильное утверждение: если $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, то найдется такое $u_0 > 0$, что при $u, v \geq u_0$

$$M(uv) \geq M(u)M(v). \quad (6.12)$$

В качестве u_0 нужно взять такое число, что $M^2(u) \leq M(u_0u)$ при $u \geq u_0$. Тогда при $u \geq v \geq u_0$

$$M(u)M(v) \leq M^2(u) \leq M(u_0u) \leq M(uv).$$

Условие (6.11) обычно легко проверяется. Рассмотрим, например, N -функцию $M(u)$, для которой гл. ч. $M(u) = u^{\ln u}$. Она удовлетворяет Δ_3 -условию. Условие (6.11) для нее означает, что при больших u, v

$$e^{(\ln u + \ln v)^2} > e^{\ln^2 u} e^{\ln^2 v}.$$

7. Признак Δ^2 -условия для дополнительной функции. В ряде случаев приходится изучать N -функции $M(u)$, для которых неизвестно явное выражение, а задана формула для дополнительной функции $N(v)$. Возникает вопрос (который решался ранее при изучении других классов N -функций) о том, как по функции $N(v)$ определить, удовлетворяет ли Δ^2 -условию дополнительная функция $M(u)$.

Установим вначале одну лемму, относящуюся к произвольным N -функциям.

Пусть $\Phi(u)$ — некоторая N -функция. В силу (1.18) функция $\frac{\Phi(u)}{u}$ монотонно возрастает при $u > 0$, причем $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$ и $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$. Поэтому функция

$$\Phi_1(u) = \int_0^{|u|} \frac{\Phi(t)}{t} dt$$

является N -функцией.

Лемма 6.2 $\Phi_1(u) \sim \Phi(u)$.

Доказательство. Очевидно, $\Phi_1(u) \leq \Phi(u)$. С другой стороны, при $u > 0$

$$\Phi_1(u) = \int_0^u \frac{\Phi(t)}{t} dt > \int_{\frac{u}{2}}^u \frac{\Phi(t)}{t} dt > \Phi\left(\frac{u}{2}\right).$$

Лемма доказана.

Теорема 6.8. Для того чтобы N -функция $M(u)$ удовлетворяла Δ^2 -условию, необходимо и достаточно, чтобы дополнительная к ней N -функция $N(v)$ при больших значениях аргумента удовлетворяла неравенству

$$\frac{N(v)}{v} < k \frac{N(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}, \quad (6.13)$$

где k — некоторое число.

Доказательство необходимости. Выполнение Δ^2 -условия означает, что при больших значениях u

$$M^2(u) < M(k_1 u).$$

Отсюда вытекает, что при больших значениях аргумента

$$M^{-1}(v) < k_1 M^{-1}(\sqrt{v}), \quad (6.14)$$

где $M^{-1}(v)$ — функция, обратная к $M(u)$.

Так как функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию, то в силу теоремы 6.1 при больших значениях аргумента

$$vM^{-1}(v) < N(k_2v) \quad (6.15)$$

и

$$N(v) < k_3 v M^{-1}(k_3 v). \quad (6.16)$$

В силу (6.16) и (6.14)

$$\frac{N(v)}{v} < k_3 M^{-1}(k_3 v) < k_1 k_3 M^{-1}(\sqrt{k_3 v}),$$

и в силу (6.15)

$$\frac{N(v)}{v} < \frac{k \cdot k_3}{\sqrt{k_3 v}} N(k_2 \sqrt{k_3 v}). \quad (6.17)$$

В силу теоремы 6.5 функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, т. е. при больших значениях аргумента

$$N(k_2 \sqrt{k_3} \sqrt{v}) < k_4 N(\sqrt{v}).$$

Поэтому из (6.17) вытекает (6.13), где $k = k_1 k_4 \sqrt{k_3}$.

Доказательство достаточности. Рассмотрим функцию $r(v) = \frac{N(v)}{v}$. В силу леммы 6.2 N -функция

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} r(t) dt$$

эквивалентна функции $N(v)$. N -функция $M_1(u)$, дополнительная к $N_1(v)$, вычисляется непосредственно:

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} r^{-1}(t) dt,$$

где $r^{-1}(t)$ — функция, обратная к монотонно возрастающей функции $r(t)$. N -функция $M_1(u)$ эквивалентна N -функции $M(u)$.

В силу (6.13) при больших значениях аргумента

$$[r^{-1}(u)]^2 < r^{-1}(ku).$$

Из этого неравенства и теоремы 6.4 вытекает, что N -функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию. Значит, и $M(u)$ удовлетворяет этому условию.

Теорема доказана.

Заметим, что в условии (6.13) всегда $k > 1$, так как для любой N -функции $N(v)$ при $v > 1$

$$\frac{N(v)}{v} > \frac{N(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}.$$

Функции, дополнительные к которым удовлетворяют Δ^2 -условию, составляют часть класса N -функций, растущих медленнее, чем любая функция $|v|^\alpha$ ($\alpha > 1$). Более того, из леммы 6.1, теоремы 2.1 и теоремы 6.1 следует, что такие N -функции при больших значениях аргумента удовлетворяют неравенству

$$N(v) < v \ln^\beta v \quad (\beta > 0).$$

8. Снова о суперпозициях N -функций. В настоящем пункте устанавливаются некоторые свойства суперпозиций $N_1[N_2(v)]$ N -функций $N_1(v)$ и $N_2(v)$, дополнительных к N -функциям $M_1(u)$ и $M_2(u)$, удовлетворяющим Δ_3 -условию.

Докажем вначале утверждение, справедливое для произвольных N -функций.

Лемма 6.3. Пусть $\Phi_1(v)$ и $\Phi_2(v)$ — две N -функции. Тогда функция

$$\Phi(v) = \frac{\Phi_1(v)\Phi_2(v)}{|v|}$$

также является N -функцией.

Доказательство. Функция $\Phi(v)$ четна, неотрицательна и очевидным образом удовлетворяет условиям

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Phi(v)}{v} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\Phi(v)}{v} = \infty.$$

В силу второго определения *N*-функции (см. стр. 19) достаточно доказать, что $\Phi(v)$ есть выпуклая функция, т. е. что

$$\Phi\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [\Phi(v_1) + \Phi(v_2)]. \quad (6.18)$$

В силу (1.18) функции $\frac{\Phi_1(v)}{v}$ и $\frac{\Phi_2(v)}{v}$ при положительных значениях v монотонно возрастают. Поэтому монотонно возрастает и функция $\Phi(v)$. Следовательно, неравенство (6.18) достаточно доказать для положительных v_1 и v_2 .

Очевидно,

$$\left[\frac{\Phi_1(v_1)}{v_1} - \frac{\Phi_1(v_2)}{v_2} \right] \left[\frac{\Phi_2(v_1)}{v_1} - \frac{\Phi_2(v_2)}{v_2} \right] \geq 0,$$

так как оба множителя имеют одинаковый знак. Отсюда следует, что

$$\frac{[\Phi_1(v_1) + \Phi_1(v_2)] [\Phi_2(v_1) + \Phi_2(v_2)]}{v_1 + v_2} \leq \frac{\Phi_1(v_1) \Phi_2(v_1)}{v_1} + \frac{\Phi_1(v_2) \Phi_2(v_2)}{v_2},$$

и в силу выпуклости *N*-функций $\Phi_1(v)$ и $\Phi_2(v)$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) &= \frac{2}{v_1 + v_2} \Phi_1\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \Phi_2\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2(v_1 + v_2)} [\Phi_1(v_1) + \Phi_1(v_2)] [\Phi_2(v_1) + \Phi_2(v_2)] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_1(v_1) \Phi_2(v_1)}{v_1} + \frac{\Phi_1(v_2) \Phi_2(v_2)}{v_2} \right], \end{aligned}$$

откуда и следует (6.18).

Лемма доказана.

Теорема 6.9. Пусть *N*-функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ удовлетворяют Δ_3 -условию и $M_1(u) \rightsquigarrow M_2(u)$.

Тогда

$$N_1[N_2(v)] \sim \Phi(v) = \frac{N_1(v) N_2(v)}{|v|}.$$

Доказательство. Вначале отметим, что для произвольных *N*-функций $N_1(v)$ и $N_2(v)$ справедливо соотношение $\frac{N_1(v) N_2(v)}{|v|} \rightsquigarrow N_1[N_2(v)]$. Действительно, в силу (1.16) при $N_2(v) > v$ справедливо неравенство

$$\frac{N_1(v)}{v} < \frac{N_1[N_2(v)]}{N_2(v)},$$

откуда вытекает, что при этих значениях v

$$\frac{N_1(v) N_2(v)}{v} < N_1 [N_2(v)].$$

Докажем теперь, что в условиях теоремы $N_1 [N_2(v)] \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{N_1(v) N_2(v)}{|v|}$.

Соотношение $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$ означает, что при больших значениях аргумента

$$M_1(u) \leq M_2(k_1 u),$$

где k_1 — некоторое число, которое можно считать большим, чем единица. Поэтому при больших значениях аргумента

$$M_2^{-1}(v) \leq k_1 M_1^{-1}(v).$$

Отсюда

$$v M_2^{-1}(v) \leq k_1 M_1^{-1}(v) M_1 [M_1^{-1}(v)].$$

N -функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию. Поэтому найдется такое $k_2 > 1$, что при больших значениях аргумента

$$u M_1(u) \leq M_1(k_2 u).$$

Из предыдущего неравенства тогда вытекает, что при больших значениях аргумента

$$v M_2^{-1}(v) \leq k_1 M_1 [k_2 M_1^{-1}(v)] \leq M_1 [k_1 k_2 M_1^{-1}(v)]. \quad (6.19)$$

Следовательно,

$$M_1^{-1} [v M_2^{-1}(v)] \leq k_1 k_2 M_1^{-1}(v)$$

и

$$v M_2^{-1}(v) M_1^{-1} [v M_2^{-1}(v)] \leq k_1 k_2 \frac{v M_1^{-1}(v) v M_2^{-1}(v)}{v}. \quad (6.20)$$

В силу теоремы 6.1 найдутся такие постоянные $k_3 < 1$ и $k_4 > 1$, что при больших значениях аргумента

$$N_1(k_3 v) \leq v M_1^{-1}(v) \leq N_1(k_4 v),$$

$$N_2(k_3 v) \leq v M_2^{-1}(v) \leq N_2(k_4 v).$$

Из этих неравенств и (6.20) следует, что при больших значениях аргумента

$$N_1 [k_3 N_2(k_3 v)] \leq k_1 k_2 \frac{N_1(k_4 v) N_2(k_4 v)}{v} = k_1 k_2 k_4 \Phi(k_4 v).$$

Отсюда

$$N_1[N_2(k_3^2 v)] \leq \Phi(k_1 k_2 k_4^2 v).$$

Таким образом, $N_1[N_2(v)] \rightarrow \Phi(v)$.

Теорема доказана.

Теорема 6.10. Пусть $M_1(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, а $M_2(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию.

Тогда справедливо утверждение теоремы 6.9:

$$N_1[N_2(v)] \sim \Phi(v) = \frac{N_1(v) N_2(v)}{|v|}.$$

Доказательство. Так как при больших значениях аргумента $M_2(u) > u$, то при больших v

$$v M_2^{-1}(v) < v^2 = M_1^2[M_1^{-1}(v)].$$

N -функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию. Это значит, что существует такое $k_1 > 1$, что при больших значениях аргумента $M_1^2(u) \leq M_1(k_1 u)$. Поэтому при больших значениях v

$$v M_2^{-1}(v) \leq M_1[k_1 M_1^{-1}(v)].$$

Это неравенство совпадает с неравенством (6.19). Из него, как и при доказательстве предыдущей теоремы, следует, что $N_1[N_2(v)] \rightarrow \Phi(v)$. Соотношение $\Phi(v) \rightarrow N_1[N_2(v)]$, как указывалось выше, справедливо всегда.

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует

Теорема 6.11. Если N -функции $\tilde{M}_1(u)$ и $M_2(u)$ удовлетворяют Δ^2 -условию, то

$$N_1[N_2(v)] \sim N_2[N_1(v)] \sim \Phi(v) = \frac{N_1(v) N_2(v)}{|v|}.$$

Нам не известно, достаточно ли в теореме 6.11 требовать выполнения более слабого Δ_3 -условия.

В качестве примера рассмотрим такие N -функции $N_1(v)$ и $N_2(v)$, что

$$\text{гл. ч. } N_1(v) = v \ln v, \quad \text{гл. ч. } N_2(v) = v e^{\sqrt{\ln v}}.$$

Функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, а функция $M_2(u)$ — Δ_3 -условию, но не удовлетворяет Δ^2 -условию. При этом

$M_2(u) \rightarrow M_1(u)$, так как $N_1(v) \rightarrow N_2(v)$. В силу теоремы 6.9

$$N_2[N_1(v)] \sim \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|},$$

а в силу теоремы 6.10

$$N_1[N_2(v)] \sim \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}.$$

Таким образом, в этом примере справедливо утверждение теоремы 6.11, хотя условия ее не выполнены.

Теорема 6.11 естественно дополняется следующим утверждением:

Теорема 6.12. Пусть N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ удовлетворяют Δ^2 -условию.

Тогда N -функции, дополнительные к N -функциям $N_1[N_2(v)]$ и $N_2[N_1(v)]$, также удовлетворяют Δ^2 -условию.

Доказательство. В силу теоремы 6.11 достаточно рассмотреть N -функцию $\Psi(u)$, дополнительную к N -функции $\Phi(v) = \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}$.

В силу теоремы 6.8 при больших значениях аргумента

$$\frac{N_1(v)}{v} < k_1 \frac{N_1(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}, \quad \frac{N_2(v)}{v} < k_2 \frac{N_2(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}.$$

Поэтому

$$\frac{\Phi(v)}{v} = \frac{N_1(v)}{v} \frac{N_2(v)}{v} < k_1 k_2 \frac{N_1(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} \frac{N_2(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} = k_1 k_2 \frac{\Phi(\sqrt{v})}{\sqrt{v}},$$

откуда следует в силу той же теоремы 6.8, что $\Psi(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию.

Теорема доказана.

§ 7. Об одном классе N -функций

1. Постановка задачи. В предыдущем параграфе были указаны формулы для N -функций, эквивалентных дополнительным к некоторым N -функциям $M(u)$. При этом удалось рассмотреть лишь такие N -функции, которые либо растут быстрее любой степенной, либо растут медленнее всех степенных функций вида $u^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$). К таким N -функциям

не относятся функции $M(u)$, для которых

$$\text{гл. ч. } M(u) = \frac{u^\alpha}{\alpha} (\ln u)^{\gamma_1} (\ln \ln u)^{\gamma_2} \dots (\ln \ln \dots \ln u)^{\gamma_n}, \quad (7.1)$$

где $\alpha > 1$, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — произвольные числа.

В настоящем параграфе изучается специальный класс N -функций, содержащий функции с главными частями вида (7.1). Для функций из этого класса удается эффективно построить N -функции, эквивалентные дополнительным.

Для простоты изложения мы предполагаем, что все рассматриваемые в настоящем параграфе N -функции имеют при больших значениях аргумента обычные (а не правые) производные.

2. Класс \mathfrak{M} . Ниже через $\chi_R(u)$ обозначается функция

$$\chi_R(u) = \frac{ur(u)}{R(u)}, \quad (7.2)$$

где $R(u)$ — некоторая дифференцируемая функция, а $r(u)$ — ее производная. Ясно, что функция $\chi_R(u)$ определена при тех значениях u , при которых существует $r(u)$ и при которых $R(u) \neq 0$.

Очевидны простейшие свойства функции $\chi_R(u)$:

$$\chi_{R_1 \cdot R_2}(u) = \chi_{R_1}(u) + \chi_{R_2}(u), \quad (7.3)$$

$$\chi_{R_1[R_2]}(u) = \chi_{R_1}[R_2(u)] \cdot \chi_{R_2}(u). \quad (7.4)$$

Обе эти формулы справедливы при тех значениях u , при которых имеют смысл выражения в правых частях.

Отметим, что для любой дифференцируемой N -функции $M(u)$

$$\chi_M(u) > 1. \quad (7.5)$$

Действительно, так как $p(u) = M'(u)$ возрастает, то

$$\chi_p(u) > M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt,$$

откуда и следует (7.5).

Через \mathfrak{M} обозначим класс таких функций $R(u)$, для которых $\chi_R(u)$ определена при всех больших u и

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \chi_R(u) = 0. \quad (7.6)$$

В силу (7.3) класс \mathfrak{M} вместе с каждым двумя функциями $R_1(u)$ и $R_2(u)$ содержит их произведение $R_1(u)R_2(u)$. Из того же свойства (7.3) следует, что

$$\chi_{\frac{1}{R}}(u) = -\chi_R(u),$$

откуда в свою очередь следует, что класс \mathfrak{M} вместе с каждой функцией $R(u)$ содержит и функцию $\frac{1}{R(u)}$.

В силу (7.4) суперпозиция $R_1[R_2(u)]$ принадлежит \mathfrak{M} , если $R_2(u) \in \mathfrak{M}$, $\lim_{u \rightarrow \infty} R_2(u) = \infty$, а $\lim_{u \rightarrow \infty} \overline{\chi_{R_1}}(u) < \infty$.

Из описанных свойств класса \mathfrak{M} вытекает, что этому классу принадлежат функции

$$(\ln u)^{\gamma_1}, (\ln \ln u)^{\gamma_2}, \dots, (\ln \ln \dots \ln u)^{\gamma_n}$$

(γ_i — любые числа).

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда для функции $R(u) \in \mathfrak{M}$ можно указать такое u_0 , что

$$\left| \frac{ur(u)}{R(u)} \right| < \varepsilon \quad (u \geq u_0),$$

откуда

$$\frac{r(u)}{R(u)} < \frac{\varepsilon}{u} \quad (u \geq u_0).$$

Интегрируя это неравенство от u_0 до u , получим:

$$\ln \left| \frac{R(u)}{R(u_0)} \right| < \varepsilon \ln \frac{u}{u_0}.$$

Следовательно,

$$|R(u)| < |R(u_0)| \left(\frac{u}{u_0} \right)^\varepsilon \quad (u \geq u_0). \quad (7.7)$$

Из (7.7) вытекает важное для дальнейшего соотношение

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{|R(u)|} = \infty. \quad (7.8)$$

Лемма 7.1. Пусть положительная при больших значениях u функция $R(u) \in \mathfrak{M}$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ функция $u^\varepsilon R(u)$ монотонно возрастает к бесконечности.

Доказательство. Достаточно показать, что функция $h(u) = u^{\frac{\varepsilon}{2}} R(u)$ имеет при больших значениях u положительную производную. Это следует из (7.6), так как

$$h'(u) = \frac{\varepsilon}{2} u^{\frac{\varepsilon}{2}-1} R(u) + u^{\frac{\varepsilon}{2}} r(u) = u^{\frac{\varepsilon}{2}-1} R(u) \left[\frac{\varepsilon}{2} + \chi_R(u) \right].$$

Лемма доказана.

Лемма 7.2. Пусть $R(u)$ такая функция из класса \mathfrak{M} , что функции

$$\frac{u^\alpha}{\alpha} R(u), \quad \frac{v^\beta}{\beta R^{\beta-1}(v)} \quad \left(\alpha, \beta > 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \right)$$

являются главными частями соответственно N -функций $M(u)$ и $N_1(v)$. Пусть выполнено условие

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{R \left[\frac{v^{\beta-1}}{R^{\beta-1}(v)} \right]}{R(v)} = b > 0. \quad (7.9)$$

Тогда N -функция $N_1(v)$ эквивалентна N -функции $N(v)$, дополнительной к N -функции $M(u)$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$p_2(u) = u^{\alpha-1} R(u), \quad q_3(v) = \left[\frac{v}{R(v)} \right]^{\beta-1}.$$

Эти функции в силу леммы 7.1 при больших значениях u, v монотонно возрастают к бесконечности. Поэтому каждую из них можно рассматривать как главную часть производных некоторых N -функций $M_2(u)$ и $N_3(v)$.

Непосредственный подсчет показывает, что при больших u

$$\frac{p(u)}{p_2(u)} = 1 + \frac{1}{\alpha} \chi_R(u), \quad \frac{q_1(v)}{q_3(v)} = 1 - \frac{\beta-1}{\beta} \chi_R(u),$$

где $p(u) = M'(u)$, $q_1(v) = N'_1(v)$. Из последних равенств и (7.6) следует, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{p(u)}{p_2(u)} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{q_1(v)}{q_3(v)} = 1.$$

Поэтому в силу леммы 3.2

$$M(u) \sim M_2(u), \quad N_1(v) \sim N_3(v). \quad (7.10)$$

Так как

$$p_2 [q_3(v)] = \frac{vR \left\{ \left[\frac{v}{R(v)} \right]^{\beta-1} \right\}}{R(v)},$$

то в силу (7.9)

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{p_2 [q_3(v)]}{v} = b > 0,$$

и из теорем 3.4 и 3.2 следует, что

$$M_2(u) \sim M_3(u), \quad N_2(v) \sim N_3(v), \quad (7.11)$$

где $M_3(u)$ и $N_2(v)$ — N -функции, дополнительные соответственно к $N_3(v)$ и $M_2(u)$.

Из (7.10) и (7.11) следует, что $M(u) \sim M_3(u)$. Значит, $N(v) \sim N_3(v)$. Отсюда, снова в силу (7.10),

$$N(v) \sim N_1(v).$$

Лемма доказана.

3. Класс \mathfrak{N} . Через \mathfrak{N} обозначим класс таких функций $f(u)$, которые при больших значениях аргумента непрерывны, неотрицательны и удовлетворяют условиям

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f[u + \delta(u)]}{f(u)} = \text{const} > 0 \quad (7.12)$$

при

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\delta(u)}{u} = d > -1. \quad (7.13)$$

Примерами функций из класса \mathfrak{N} могут служить функции $|u|^\gamma$ при любом γ , $\ln |u|$ и т. п. Для первой из них

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f[u + \delta(u)]}{f(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\delta(u)}{u} \right]^\gamma = (1 + d)^\gamma > 0,$$

для второй

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f[u + \delta(u)]}{f(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{\ln \left[1 + \frac{\delta(u)}{u} \right]}{\ln u} \right\} = 1.$$

Вместе с каждой функцией $f(u)$ в класс \mathfrak{N} входит и функция $\frac{1}{f(u)}$, вместе с двумя функциями $f_1(u)$ и $f_2(u)$ в класс \mathfrak{N} входит и их произведение $f_1(u)f_2(u)$; если $\lim_{u \rightarrow \infty} f_2(u) = \infty$, то вместе с функциями $f_1(u)$ и $f_2(u)$ в класс \mathfrak{N} входит и суппозиция $f_1[f_2(u)]$.

В доказательстве нуждается только последнее утверждение. Пусть функция $\delta(u)$ удовлетворяет условию (7.13) и

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f_2[u + \delta(u)]}{f_2(u)} = \gamma > 0.$$

Тогда функция $\delta_1(v)$, определенная равенством

$$\delta_1[f_2(u)] = f_2[u + \delta(u)] - f_2(u),$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\delta_1(v)}{v} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\delta_1[f_2(u)]}{f_2(u)} = \gamma - 1 > -1,$$

откуда

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f_1\{f_2[u + \delta(u)]\}}{f_1[f_2(u)]} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f_1\{f_2(u) + \delta_1[f_2(u)]\}}{f_1[f_2(u)]} = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{f_1[v + \delta_1(v)]}{f_1(v)} = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Значит, $f_1[f_2(u)] \in \mathfrak{N}$.

Из описанных свойств класса \mathfrak{N} вытекает, что ему принадлежит функция

$$f(u) = u^{\gamma_1} (\ln u)^{\gamma_2} (\ln \ln u)^{\gamma_3} \dots (\ln \ln \dots \ln u)^{\gamma_n}, \quad (7.14)$$

рассматриваемая при больших значениях аргумента. В этой формуле γ_i — произвольные числа.

Лемма 7.3. *Монотонные при больших значениях u функции $f(u)$ из класса \mathfrak{N} обладают свойством*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln f(u)}{u} = 0. \quad (7.15)$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай возрастающей функции $f(u)$. Из (7.12), если положить в этом условии $\delta(u) = u$, вытекает, что при u , больших некоторого $u_0 > 0$:

$$f(2u) \leq kf(u),$$

где k — некоторое положительное число. Пусть $2^n u_0 < u \leq \leq 2^{n+1} u_0$. Тогда

$$f(u) \leq f(2^{n+1} u_0) \leq k^{n+1} f(u_0) \leq k f(u_0) 2^{n \ln k^2} \leq k f(u_0) \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\ln k^2}.$$

Следовательно,

$$\ln f(u) \leq \ln [k f(u_0) u_0^{-\ln k^2}] + \ln_k 2 \cdot \ln u,$$

откуда и вытекает (7.15).

Пусть теперь функция $f(u)$ монотонно убывает. Тогда функция $f_1(u) = \frac{1}{f(u)}$, также принадлежащая классу \mathfrak{R} , монотонно возрастает. Из уже доказанного утверждения для монотонно возрастающих функций следует, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln f(u)}{u} = - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln f_1(u)}{u} = 0.$$

Лемма доказана.

Заметим, что функция (7.14) при больших значениях u , как это нетрудно проверить, монотонна.

Лемма 7.4. Пусть функция $R(u) \in \mathfrak{R}$ и представима в виде $R(u) = f(\ln u)$, где $f(u) \in \mathfrak{R}$. Тогда при $\alpha > 1$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{R \left\{ \left[\frac{v}{R(v)} \right]^{\alpha-1} \right\}}{R(v)} = \text{const} > 0.$$

Доказательство. Пусть $\delta(u) = (\alpha - 2)u - (\alpha - 1) \times \times \ln f(u)$. В силу предыдущей леммы

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\delta(u)}{u} = \alpha - 2 > -1.$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{R \left\{ \left[\frac{v}{R(v)} \right]^{\alpha-1} \right\}}{R(v)} &= \frac{f[(\alpha - 1) \ln v - (\alpha - 1) \ln R(v)]}{f(\ln v)} = \\ &= \frac{f[\ln v + \delta(\ln v)]}{f(\ln v)}, \end{aligned}$$

то

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{R \left\{ \left[\frac{v}{R(v)} \right]^{\alpha-1} \right\}}{R(v)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f[u + \delta(u)]}{f(u)} = \text{const} > 0.$$

Лемма доказана.

4. Теорема о дополнительной функции.

Теорема 7.1. Пусть $R(u)$ принадлежит классу \mathfrak{M} и представима в виде $R(u) = f(\ln u)$, где $f(u)$ — монотонная функция из класса \mathfrak{N} . Пусть задана такая N -функция $M(u)$, что

$$\text{гл. ч. } M(u) = \frac{u^\alpha}{\alpha} R(u) \quad (\alpha > 1).$$

Пусть, наконец, функция $\frac{v^\beta}{\beta} R^{1-\beta}(v) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right)$ является главной частью некоторой N -функции $N_1(v)$.

Тогда

$$N(v) \sim N_1(v). \quad (7.16)$$

Доказательство. Из леммы 7.4 следует, что выполнено условие (7.9). Из леммы 7.2 следует (7.16).

Теорема доказана.

Вернемся к рассмотрению N -функции $M(u)$, указанной в начале параграфа:

$$\text{гл. ч. } M(u) = \frac{u^\alpha}{\alpha} (\ln u)^{\gamma_1} (\ln \ln u)^{\gamma_2} \dots (\ln \ln \dots \ln u)^{\gamma_n} \quad (7.1)$$

($\alpha > 1$, γ_i — произвольные числа). Эту функцию можно представить в виде

$$\text{гл. ч. } M(u) = \frac{u^\alpha}{\alpha} f(\ln u),$$

где $f(u)$ определена формулой (7.14). Таким образом, функция $M(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1. Положим

$$\text{гл. ч. } N_1(v) = \frac{v^\beta}{\beta} [(\ln v)^{-\gamma_1} (\ln \ln v)^{-\gamma_2} \dots (\ln \ln \dots \ln v)^{-\gamma_n}]^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right). \quad (7.17)$$

Из теоремы 7.1 вытекает

Теорема 7.2. N -функция $N_1(v)$ с главной частью (7.17) эквивалентна дополнительной к N -функции $M(u)$ с главной частью (7.1).

Г Л А В А II

ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

§ 8. Классы Орлича

1. Определение. Далее во всей книге через G обозначается ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, на котором рассматривается обычная лебегова мера. Отметим, что большинство приводимых ниже утверждений и построений сохраняют силу и для случая, когда рассматривается абстрактное множество с конечной непрерывной мерой (под непрерывностью меры мы понимаем существование у каждого множества подмножества половинной меры).

Пусть $M(u)$ — некоторая N -функция. Через $L_M(G)$ будем обозначать класс таких вещественных определенных на G функций $u(x)$, для которых

$$\rho(u; M) = \int_G M[u(x)] dx < \infty.$$

При этом функции, отличающиеся лишь на множестве нулевой меры, не различаются. Обозначение $\rho(u; M)$ часто используется в дальнейшем.

Классы $L_M(G)$ называют *классами Орлича*. Там, где это не может вызвать недоразумений, мы будем писать L_M вместо $L_M(G)$.

Классу L_M принадлежат все ограниченные функции, но не все суммируемые. Нетрудно видеть, что каждая функция из класса L_M суммируема.

Отметим, что *каждая суммируемая на G функция $u(x)$ принадлежит некоторому классу Орлича*. Для доказа-

тельства этого утверждения рассмотрим множества $G_n = G\{n - 1 \leq |u(x)| < n\}$. Очевидно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{mes} G_n \leq \int_G |u(x)| dx + \operatorname{mes} G < \infty.$$

Как известно, можно построить такую неограниченно возрастающую последовательность α_n , что и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \operatorname{mes} G_n < \infty. \quad (8.1)$$

Положим

$$p(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t < 1, \\ \alpha_n, & \text{если } n \leq t \leq n+1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Функция $p(t)$ обладает всеми свойствами, необходимыми для того, чтобы

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$$

была N -функцией. Так как

$$M(n) = \int_0^n p(t) dt \leq \alpha_n n,$$

то в силу (8.1)

$$\begin{aligned} \int_G M[u(x)] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[u(x)] dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} M(n) \operatorname{mes} G_n \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \operatorname{mes} G_n < \infty. \end{aligned}$$

Значит, $u(x) \in L_M$.

Доказанное утверждение означает, что пространство L суммируемых на G функций есть объединение всех классов Орлича.

Ниже будет использовано более сильное утверждение. Оказывается, что для каждой суммируемой функции $u(x)$

может быть указана такая N -функция $Q(u)$, удовлетворяющая Δ' -условию, что

$$\int_G Q\{Q[u(x)]\} dx < \infty.$$

Как уже было показано, существует такая N -функция $M(u)$, что

$$\int_G M[u(x)] dx < \infty.$$

Функцию $M(u)$ можно представить в виде суперпозиции $M(u) = Q_1[Q_2(u)]$. Рассмотрим N -функцию $P(v) = e^{P_1(v)+P_2(v)} - 1$, где $P_1(v)$ и $P_2(v)$ — N -функции, дополнительные к $Q_1(u)$ и $Q_2(u)$. Функция $P(v)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, причем $P_1(v) < P(v)$, $P_2(v) < P(v)$ при больших значениях v . В силу теоремы 6.6 дополнительная к $P(v)$ N -функция $Q(u)$ удовлетворяет Δ' -условию и при больших значениях аргумента в силу теоремы 2.1 $Q(u) < Q_1(u)$, $Q(u) < Q_2(u)$. Поэтому

$$\int_G Q\{Q[u(x)]\} dx < a + \int_G Q_1\{Q_2[u(x)]\} dx < \infty.$$

2. Интегральное неравенство Иенсена. Пусть $u(x) \in L_M$, тогда имеет место неравенство

$$M\left\{\frac{\int_G u(x) dx}{\text{mes } G}\right\} \leq \frac{\int_G M[u(x)] dx}{\text{mes } G}, \quad (8.2)$$

которое мы будем называть *интегральным неравенством Иенсена*. Отметим, что неравенством Иенсена часто называют более общее соотношение (см., например, [12], стр. 73).

Рассмотрим вначале случай непрерывной функции $u(x)$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Множество G можно разбить на n таких частей G_i , что $\text{mes } G_i = \frac{\text{mes } G}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$),

$$\left| M\left(\frac{\int_G u(x) dx}{\text{mes } G}\right) - M\left(\sum_{i=1}^n u(x_i) \frac{1}{n}\right) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\int_G M[u(x)] dx}{\text{mes } G} - \sum_{i=1}^n \frac{M[u(x_i)]}{n} \right| < \varepsilon,$$

где x_i — некоторые точки множества G_i . Из указанных неравенств и (1.3) следует

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\int_G u(x) dx}{\text{mes } G}\right) &\leq M\left(\sum_{i=1}^n u(x_i) \frac{1}{n}\right) + \varepsilon \leq \frac{\sum_{i=1}^n M[u(x_i)]}{n} + \varepsilon \leq \\ &\leq \frac{\int_G M[u(x)] dx}{\text{mes } G} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как ε произвольно, то имеет место неравенство (8.2).

Для случая произвольной функции из L_M неравенство (8.2) получается предельным переходом из этого же неравенства для непрерывных функций.

3. Сравнение классов. Классы Орлича L_{M_1} и L_{M_2} , определенные различными N -функциями $M_1(u)$ и $M_2(u)$, вообще говоря, различны.

Теорема 8.1 Включение

$$L_{M_1} \subset L_{M_2} \quad (8.3)$$

имеет место в том и только том случае, если существуют такие положительные постоянные u_0 и a , что

$$M_2(u) \leq a M_1(u) \quad (u \geq u_0). \quad (8.4)$$

Доказательство. Достаточность условия (8.4) очевидна: для любой функции $u(x) \in L_{M_1}$

$$\begin{aligned} \rho(u; M_2) &= \int_G M_2[u(x)] dx \leq \\ &\leq M_2(u_0) \text{mes } G + a \int_G M_1[u(x)] dx < \infty. \end{aligned}$$

Допустим, что условие (8.4) не выполнено. Тогда найдется такая неограниченно возрастающая последовательность чисел u_n , что

$$M_2(u_n) > 2^n M_1(u_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8.5)$$

Разобьем множество G на такие непересекающиеся части G_n , что

$$\text{mes } G_n = \frac{M_1(u_1) \text{mes } G}{2^n M_1(u_n)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и положим

$$u(x) = \begin{cases} u_n & \text{при } x \in G_n, \\ 0 & \text{при } x \in \bar{\bigcup}_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases}$$

Функция $u(x) \in L_{M_1}$, так как

$$\begin{aligned} \int_G M_1[u(x)] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M_1[u(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(u_n) \text{mes } G_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(u_1) \text{mes } G}{2^n} < \infty, \end{aligned}$$

но $u(x) \notin L_{M_2}$, так как в силу (8.5)

$$\begin{aligned} \int_G M_2[u(x)] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M_2[u(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} M_2(u_n) \text{mes } G_n \gg \\ &\gg \sum_{n=1}^{\infty} M_1(u_1) \text{mes } G = \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что две функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ определяют один и тот же класс Орлича тогда и только тогда, когда существуют такие положительные постоянные a , b и u_0 , что

$$aM_2(u) \leq M_1(u) \leq bM_2(u) \quad (u \geq u_0). \quad (8.6)$$

4. О структуре класса Орлича. Из неравенства Иенсена (1.2) вытекает, что класс Орлича L_M является выпуклым множеством: вместе с каждыми двумя функциями $u_1(x)$ и $u_2(x)$ класс L_M содержит полностью весь «отрезок» $u_\alpha(x) = \alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x)$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). Действительно, если $u_1(x), u_2(x) \in L_M$, то

$$\begin{aligned} \rho(u_\alpha; M) &= \int_G M[\alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x)] dx \leq \\ &\leq \alpha \rho(u_1; M) + (1-\alpha)\rho(u_2; M) < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 8.2. *Класс L_M является линейным множеством тогда и только тогда, когда N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.*

Доказательство. Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда для любого l существуют такие постоянные $k(l)$ и u_0 , что

$$M(lu) \leq k(l)M(u) \quad (u \geq u_0).$$

В силу теоремы 8.1 из последнего неравенства вытекает, что вместе с каждой функцией $u(x)$ классу L_M принадлежит и функция $lu(x)$.

Пусть $u_1(x), u_2(x) \in L_M$. Тогда в силу уже доказанного и неравенства (1.1)

$$\begin{aligned} \int_G M[\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)] dx &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_G M[2\alpha u_1(x)] dx + \frac{1}{2} \int_G M[2\beta u_2(x)] dx < \infty \end{aligned}$$

при любых α, β .

Достаточность условия теоремы доказана.

Пусть теперь L_M является линейным множеством. Это, в частности, означает, что $2u(x)$ принадлежит L_M вместе с $u(x)$, т. е. что $L_M \subset L_{M_1}$, где через $M_1(u)$ обозначена N -функция $M(2u)$. В силу теоремы 8.1 из последнего заключения следует существование таких постоянных a и u_0 , что

$$M_1(u) = M(2u) \leq aM(u) \quad (u \geq u_0).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим подробнее случай, когда N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Пусть $u(x) \in L_M$. «Лучом», проходящим через $u(x)$, назовем совокупность функций $u_\beta(x) = \beta u(x)$ ($0 \leq \beta < \infty$). Если функция $u(x)$ ограничена, то ясно, что весь «луч» $u_\beta(x)$ принадлежит L_M . В силу теоремы 8.2 имеются и такие функции, для которых часть «луча» принадлежит L_M , но весь «луч» этому классу не принадлежит. Обозначим через β_0 такое число, что $\beta u(x) \in L_M$ при $\beta < \beta_0$ и $\beta u(x) \notin L_M$ при $\beta > \beta_0$. Возникает вопрос о том, принадлежит ли классу L_M функция $\beta_0 u(x)$. Оказывается, что возможны оба случая.

Пусть N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда можно указать такую монотонно возрастающую последовательность чисел u_n ($n = 1, 2, \dots$), стремящуюся к бесконечности, что $M(u_1) > 1$ и

$$M\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n\right] > 2^n M(u_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8.7)$$

Пусть G_n — такие непересекающиеся подмножества G , что

$$\text{mes } G_n = \frac{\text{mes } G}{2^n M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8.8)$$

Определим функцию $u_*(x)$ равенствами

$$u_*(x) = \begin{cases} u_n, & \text{если } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0, & \text{если } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases}$$

Функция $u_*(x)$ принадлежит L_M , так как

$$\begin{aligned} \rho(u_*; M) &= \int_G M[u_*(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[u_*(x)] dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n) \text{mes } G_n < \infty. \end{aligned}$$

В силу (1.17) функции $\beta u_*(x)$ при $\beta < 1$ также принадлежат L_M . Покажем, что $\beta u_*(x)$ при $\beta > 1$ не принадлежит L_M . Действительно, при $1 + \frac{1}{n} < \beta$ в силу (8.7) и (8.8)

$$\begin{aligned} \int_{G_n} M[\beta u_*(x)] dx &= M[\beta u_n] \text{mes } G_n > \\ &> M\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n\right] \text{mes } G_n > \text{mes } G, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \rho(\beta u_*; M) &= \int_G M[\beta u_*(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[\beta u_*(x)] dx \gg \\ &\gg \sum_{1 + \frac{1}{n} < \beta} \int_{G_n} M[\beta u_*(x)] dx = \infty. \end{aligned}$$

Теперь построим такую функцию $u^*(x)$, что $\beta u^*(x) \in L_M$ при $\beta < 1$, но $\beta u^*(x) \notin L_M$ при $\beta \geq 1$. Для этого положим

$$u^*(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n, & \text{если } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0, & \text{если } x \in \bar{\bigcup}_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases}$$

В силу (8.7) и (8.8) при $\beta \geq 1$

$$\begin{aligned} \rho(\beta u^*; M) &= \int_G M[\beta u^*(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[\beta u^*(x)] dx \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} M\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n\right] \text{mes } G_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n M(u_n) \text{mes } G_n = \infty. \end{aligned}$$

Если же $\beta < 1$, то при $\beta \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$

$$\int_{G_n} M[\beta u^*(x)] dx = M\left[\beta \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n\right] \text{mes } G_n \leq \frac{\text{mes } G}{2^n},$$

откуда

$$\rho(\beta u^*; M) = \int_G M[\beta u^*(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[\beta u^*(x)] dx < \infty.$$

§ 9. Пространство L_M^*

1. Норм а по Орличу. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — взаимно дополнительные друг к другу N -функции. Через $L_M^*(G)$ будем обозначать совокупность функций $u(x)$, удовлетворяющих условию

$$(u, v) = \int_G u(x) v(x) dx < \infty$$

при всех $v(x) \in L_N$. При этом функции, отличающиеся лишь на множестве нулевой меры, как и при определении классов Орлича, не различаются. Там, где это не может вызвать недоразумений, мы будем писать L_M^* вместо $L_M^*(G)$.

Из определения следует, что L_M^* есть линейное множество.

В силу неравенства Юнга (2.6) для каждой пары функций $u(x) \in L_M$, $v(x) \in L_M$

$$(u, v) = \int_G u(x)v(x) dx \leq \rho(u; M) + \rho(v; N), \quad (9.1)$$

откуда следует, что $L_M \subset L_M^*$.

Теорема 9.1 Пусть $u(x) \in L_M^*$. Тогда

$$\sup_{\rho(v; N) \leq 1} |(u, v)| = \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G u(x)v(x) dx \right| < \infty.$$

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда можно указать такую функцию $u_0(x) \in L_M^*$ и такую последовательность функций $v_n(x) \in L_N$, $\rho(v_n; N) \leq 1$, что

$$\int_G u_0(x)v_n(x) dx > 2^n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9.2)$$

Без ограничения общности можно считать, что все эти функции положительны.

Рассмотрим возрастающую последовательность функций

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} v_k(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Легко видеть, что в силу выпуклости N -функции $N(v)$

$$\rho(g_n; N) \leq \sum_{k=1}^n \rho(v_k; N) < 1,$$

и при этом в силу (9.2)

$$\int_G u_0(x)g_n(x) dx \geq n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9.3)$$

Монотонная последовательность функций $g_n(x)$ почти везде на G сходится к функции

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} v_k(x).$$

Так как последовательность функций $N[g_n(x)]$ также монотонно возрастает, то, переходя в неравенстве

$$\int_G N[g_n(x)] dx < 1$$

к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим в силу теоремы Леви*), что

$$\int_G N[g(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G N[g_n(x)] dx \leq 1.$$

Таким образом, функция $g(x) \in L_N$.

Монотонная последовательность суммируемых функций $u_0(x)g_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) почти везде сходится к функции $u_0(x)g(x)$. Поэтому в силу той же теоремы Леви и (9.3)

$$\int_G u_0(x)g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G u_0(x)g_n(x) dx = \infty.$$

Это противоречит тому, что $u_0(x) \in L_M^*$.

Теорема доказана.

Доказанное утверждение позволяет ввести в множестве L_M^* норму Орлича при помощи следующего равенства:

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G u(x)v(x) dx \right|. \quad (9.4)$$

*) Теорема Леви (см. [38]). Если монотонно возрастающая последовательность измеримых функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ почти везде на G сходится к функции $\varphi(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \varphi_n(x) dx = \int_G \varphi(x) dx.$$

Из определения вытекает, что норма (9.4) удовлетворяет обычным аксиомам:

1) $\|u\|_M = 0$ тогда и только тогда, когда $u(x) = 0$ почти везде;

$$2) \|\alpha u\|_M = |\alpha| \|u\|_M;$$

$$3) \|u_1 + u_2\|_M \leq \|u_1\|_M + \|u_2\|_M.$$

Таким образом, множество L_M^* становится линейным нормированным пространством, которое называют *пространством Орлича*.

Отметим еще одно очевидное свойство нормы. Если $u_1(x), u_2(x) \in L_M^*$ и почти везде на G $|u_1(x)| \leq |u_2(x)|$, то $\|u_1\|_M \leq \|u_2\|_M$.

В качестве примера рассмотрим случай пространства L_M^* , определенного N -функцией $M(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > 1$). Дополнительной к ней будет N -функция $N(v) = \frac{|v|^\beta}{\beta}$ ($\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$).

Пусть вначале $u_1(x) \in L_M^*$ и

$$\|u_1\|_\alpha = \left(\int_G |u_1(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1. \quad (9.5)$$

В силу известного неравенства Гёльдера для любой функции $v(x) \in L_N$, удовлетворяющей условию $\rho(v; N) \leq 1$, имеем:

$$\left| \int_G u_1(x) v(x) dx \right| \leq \left(\int_G |u_1(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_G |v(x)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \beta^{\frac{1}{\beta}},$$

так что

$$\|u_1\|_M = \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G u_1(x) v(x) dx \right| \leq \beta^{\frac{1}{\beta}}. \quad (9.6)$$

С другой стороны, для функции $v_0(x) = \beta^{\frac{1}{\beta}} |u_1(x)|^{\alpha-1} \text{sign } u_1(x)$, удовлетворяющей условию $\rho(v; N) = 1$,

$$\int_G u_1(x) v_0(x) dx = \beta^{\frac{1}{\beta}} \int_G |u_1(x)|^\alpha dx = \beta^{\frac{1}{\beta}}.$$

Отсюда и из (9.6) следует, что

$$\|u_1\|_M = \beta^{\frac{1}{\beta}}.$$

Пусть теперь $u(x)$ — произвольная функция из L_M^* . Для функции $u_1(x) = \frac{u(x)}{\|u\|_\alpha}$ выполнено условие (9.5). Поэтому

$$\|u\|_M = \beta^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_G |u(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (9.7)$$

Таким образом, норма, определенная в пространстве L_M^* по Орличу, отличается от обычной нормы в пространстве L^α постоянным множителем.

2. Полнота.

Теорема 9.2. *Пространство Орлича полно.*

Доказательство. Пусть последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится в себе, т. е.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_M = 0. \quad (9.8)$$

Это означает, что для любой функции $v(x) \in L_M$, удовлетворяющей условию $\rho(v; N) \leq 1$,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_G |u_n(x) - u_m(x)| v(x) dx = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится по мере. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $u_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$), сходящуюся почти везде к некоторой функции $u_0(x)$.

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (9.8) можно указать такое $k(\varepsilon)$, что при всех $k, k+p > k(\varepsilon)$

$$\int_G |u_{n_{k+p}}(x) - u_{n_k}(x)| v(x) dx < \varepsilon$$

для всех $v(x) \in L_M$, удовлетворяющих условию $\rho(v; N) \leq 1$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $p \rightarrow \infty$

в силу теоремы Фату*) получим:

$$\int_G |u_0(x) - u_{n_k}(x)| v(x) dx \leq \varepsilon$$

для всех $v(x) \in L_N$, удовлетворяющих условию $\rho(v; N) \leq 1$.

Из этого неравенства вытекает, во-первых, что $u_0(x) - u_{n_k}(x) \in L_M^*$. Следовательно, и $u_0(x) \in L_M^*$. Во-вторых, из него следует, что

$$\|u_0 - u_{n_k}\|_M \leq \varepsilon,$$

т. е. что подпоследовательность $u_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) сходится к $u_0(x)$ по норме. Так как $u_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) есть подпоследовательность сходящейся в себе последовательности, то и вся последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится к функции $u_0(x)$.

Теорема доказана.

Таким образом, пространство Орлича является банаховым пространством.

3. Норма характеристической функции. Характеристическую функцию множества $\mathcal{E} \subset G$ будем обозначать через $\chi(x; \mathcal{E})$.

Пусть $v(x)$ — такая функция из L_N , что $\rho(v; N) \leq 1$. Тогда по интегральному неравенству Иенсена (8.2)

$$N \left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \int_{\mathcal{E}} v(x) dx \right) \leq \frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \int_{\mathcal{E}} N[v(x)] dx \leq \frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}},$$

откуда

$$\int_{\mathcal{E}} v(x) dx \leq \text{mes } \mathcal{E} N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \right), \quad (9.9)$$

где $N^{-1}(u)$ — функция, обратная к $N(v)$.

*) Теорема Фату (см. [33]). Если последовательность измеримых и неотрицательных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ почти везде на G сходится к функции $\varphi(x)$, то

$$\int_G \varphi(x) dx \leq \sup_n \left\{ \int_G \varphi_n(x) dx \right\}.$$

Для функции $v_0(x) = N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \right) \chi(x; \mathcal{E})$, удовлетворяющей условию $\rho(v_0; N) = 1$,

$$\int_{\mathcal{E}} v_0(x) dx = \text{mes } \mathcal{E} N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \right). \quad (9.10)$$

По определению нормы

$$\begin{aligned} \|\chi(x; \mathcal{E})\|_M &= \sup_{\rho(v; N) < 1} \left| \int_{\mathcal{E}} \chi(x; \mathcal{E}) v(x) dx \right| = \\ &= \sup_{\rho(v; N) < 1} \left| \int_{\mathcal{E}} v(x) dx \right|, \end{aligned}$$

откуда в силу (9.9) и (9.10) получаем формулу для нормы характеристической функции

$$\|\chi(x; \mathcal{E})\|_M = \text{mes } \mathcal{E} N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \right). \quad (9.11)$$

4. Неравенство Гёльдера. Класс L_M , как уже отмечалось, содержится в пространстве L_M^* . При этом в силу (9.1) для каждой функции $u(x) \in L_M$

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v; N) < 1} |(u, v)| \leq \rho(u; M) + 1. \quad (9.12)$$

Лемма 9.1. Пусть $p(u)$ — правая производная N -функции $M(u)$. Пусть $u(x) \in L_M^*$ и $\|u\|_M \leq 1$. Тогда функция $v_0(x) = p(|u(x)|)$ принадлежит L_N и $\rho(v_0; N) \leq 1$.

Доказательство. Докажем прежде всего, что для любой функции $v(x) \in L_N$

$$\left| \int_{\mathcal{E}} u(x) v(x) dx \right| \leq \begin{cases} \|u\|_M, & \text{если } \rho(v; N) \leq 1, \\ \|u\|_M \rho(v; N), & \text{если } \rho(v; N) > 1. \end{cases} \quad (9.13)$$

Первое из неравенств (9.13) очевидно. Для получения второго заметим, что при $\rho(v; N) > 1$ из (1.17) вытекает, что

$$N \left[\frac{v(x)}{\rho(v; N)} \right] \leq \frac{N[v(x)]}{\rho(v; N)},$$

так что

$$\int_G N \left[\frac{v(x)}{\rho(v; N)} \right] dx \leq \frac{1}{\rho(v; N)} \int_G N [v(x)] dx = 1.$$

Поэтому

$$\left| \int_G u(x) \frac{v(x)}{\rho(v; N)} dx \right| \leq \|u\|_M,$$

откуда и следует второе неравенство (9.13).

Пусть $\|u\|_M \leq 1$. Положим

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } |u(x)| \leq n, \\ 0, & \text{если } |u(x)| > n. \end{cases}$$

Так как функции $u_n(x)$ ограничены, то $p(|u_n(x)|) \in L_N$. Допустим, что утверждение леммы не выполняется. Тогда можно указать такое n_0 , что

$$\int_G N [p(|u_{n_0}(x)|)] dx > 1.$$

В силу (2.7)

$$\begin{aligned} N [p(|u_{n_0}(x)|)] &< M [u_{n_0}(x)] + N [p(|u_{n_0}(x)|)] = \\ &= |u_{n_0}(x)| p(|u_{n_0}(x)|). \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство и используя (9.13), получим:

$$\begin{aligned} \int_G N [p(|u_{n_0}(x)|)] dx &< \int_G |u_{n_0}(x)| p(|u_{n_0}(x)|) dx \leq \\ &\leq \|u_{n_0}\|_M \int_G N [p(|u_{n_0}(x)|)] dx, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству $\|u_{n_0}\|_M \leq \|u\|_M \leq 1$.

Лемма доказана.

Лемма 9.2. Пусть $\|u\|_M \leq 1$. Тогда $u(x) \in L_M$ и

$$\rho(u; M) \leq \|u\|_M. \quad (9.14)$$

Доказательство. Положим $v_0(x) = p(|u(x)|) \operatorname{sign} u(x)$. В силу леммы 9.1 $\rho(v_0; N) \leq 1$. Так как в силу (2.7)

$$u(x)v_0(x) = M[u(x)] + N[v_0(x)],$$

то

$$\begin{aligned} \int_G M[u(x)] dx &\leq \int_G M[u(x)] dx + \int_G N[v_0(x)] dx = \\ &= \int_G u(x)v_0(x) dx \leq \|u\|_M. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из этой леммы непосредственно следует важное неравенство

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_M}\right] dx \leq 1. \quad (9.15)$$

Теорема 9.3. Для любой пары функций $u(x) \in L_M^*$, $v(x) \in L_N^*$ справедливо неравенство

$$\left| \int_G u(x)v(x) dx \right| \leq \|u\|_M \|v\|_N. \quad (9.16)$$

Доказательство. В силу (9.15)

$$\rho\left(\frac{v}{\|v\|_N}; N\right) = \int_G N\left[\frac{v(x)}{\|v\|_N}\right] dx \leq 1.$$

Поэтому

$$\left| \int_G u(x) \frac{v(x)}{\|v\|_N} dx \right| \leq \|u\|_M,$$

откуда следует (9.16).

Теорема доказана.

Неравенство (9.16) будем называть *неравенством Гёльдера*.

Б. Случай Δ_2 -условия. Из неравенства (9.15) следует, что пространство Орлича L_M^* является линейной оболочкой класса L_M . При этом в силу теоремы 8.2 L_M является правильной частью L_M^* , если N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. В силу этой же теоремы L_M совпадает с L_M^* , если $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

6. Сходимость в среднем. Говорят, что последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится в среднем к функции $u_0(x) \in L_M^*$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M[u_n(x) - u_0(x)] dx = 0.$$

Из неравенства (9.14) следует, что каждая сходящаяся по норме L_M^* к некоторой функции $u_0(x)$ последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится также к этой функции $u_0(x)$ и в среднем. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Действительно, пусть N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда существует такая монотонная неограниченно возрастающая последовательность чисел u_n , что

$$M(2u_n) > \frac{2^n}{\text{mes } G} M(u_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При этом можно считать, что $M(u_1) > 1$. Построим для каждого n систему непересекающихся множеств $G_k^{(n)} \subset G$ ($k = 1, 2, \dots, n$), для которых

$$\text{mes } G_k^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{\text{mes } G}{2^k M(u_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

и положим

$$u_n(x) = \begin{cases} u_k, & \text{если } x \in G_k^{(n)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{если } x \in \bar{\bigcup}_{k=1}^n G_k^{(n)}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_G M[u_n(x)] dx &= \sum_{k=1}^n \int_{G_k^{(n)}} M[u_n(x)] dx = \\ &= \sum_{k=1}^n M(u_k) \text{mes } G_k^{(n)} < \frac{\text{mes } G}{n}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M[u_n(x)] dx = 0,$$

откуда следует, что последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится в среднем к нулю. Если бы эта последовательность сходилась к нулю и по норме, то в силу (9.14) выполнялось бы неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M[2u_n(x)] dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|2u_n\|_M = 0,$$

в то время как

$$\begin{aligned} \int_G M[2u_n(x)] dx &= \sum_{k=1}^n \int_{G_k^{(n)}} M[2u_n(x)] dx = \\ &= \sum_{k=1}^n M(2u_k) \text{mes } G_k^{(n)} > 1. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) не сходится по норме.

Теорема 9.4. Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Тогда сходимость по норме эквивалентна сходимости в среднем.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь тот факт, что из сходимости в среднем следует сходимость по норме.

Пусть $u_n(x) \in L_M^* = L_M$ ($n = 0, 1, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M[u_n(x) - u_0(x)] dx = 0. \quad (9.17)$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$.

Так как N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то из (9.17) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M[2^k(u_n(x) - u_0(x))] dx = 0.$$

Пусть n_0 — такое натуральное число, что при $n \geq n_0$

$$\int_G M[2^k(u_n(x) - u_0(x))] dx < 1.$$

Тогда в силу (9.12) при $n \geq n_0$

$$\|2^k(u_n - u_0)\|_M \leq \rho(2^k(u_n - u_0); M) + 1 < 2,$$

откуда следует

$$\|u_n - u_0\|_M < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится к $u_0(x)$ по норме.

Теорема доказана.

Отметим, что в смысле сходимости в среднем множество ограниченных функций всюду плотно в классе L_M , т. е. для каждой функции $u(x) \in L_M$ можно построить такую последовательность ограниченных функций $u_n(x)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M[u_n(x) - u(x)] dx = 0.$$

Функции $u_n(x)$ можно, например, определить равенством

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } |u(x)| \leq n, \\ 0, & \text{если } |u(x)| > n. \end{cases}$$

Из неравенства (9.12) вытекает, что всякое множество функций $\mathfrak{N} \subset L_M$, ограниченное в среднем, т. е. удовлетворяющее условию

$$\int_G M[u(x)] dx \leq a \quad (u(x) \in \mathfrak{N}),$$

будет также ограниченным и по норме

$$\|u\|_M \leq b \quad (u(x) \in \mathfrak{N}),$$

где $b = b(a)$ зависит только от постоянной a . Обратное утверждение, вообще говоря, неверно хотя бы уже потому, что не всякая функция из L_M^* принадлежит L_M .

Однако если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то справедливо утверждение: *всякое ограниченное по норме множество $\mathfrak{N} \subset L_M^* = L_M$ будет также ограниченным и в среднем.* Пусть, действительно, $\|u\|_M \leq a$ для всех $u(x) \in \mathfrak{N}$.

Так как $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то существуют такие постоянные k и u_0 , что

$$M(au) \leq kM(u) \quad (u \geq u_0).$$

Тогда при всех u

$$M(au) < M(au_0) + kM(u).$$

Из этого неравенства и (9.15) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_G M[u(x)] dx &\leq M(au_0) \text{mes } G + k \int_G M\left[\frac{u(x)}{a}\right] dx \leq \\ &\leq M(au_0) \text{mes } G + k = b(a), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

7. Норм а Лю к с е м б у р г а. Множество L_M^* можно превратить в банахово пространство и при помощи норм, отличных от той, которая была введена выше.

Рассмотрим одну из таких норм, подробно изученную Люксембургом [32]. Пусть

$$\|u\|_{(M)} = \inf k, \quad (9.18)$$

где инфимум берется по всем таким $k > 0$, что

$$\rho\left(\frac{u}{k}; M\right) = \int_G M\left[\frac{u(x)}{k}\right] dx \leq 1. \quad (9.19)$$

Из неравенства (9.15) следует, что для каждой функции $u(x) \in L_M^*$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{(M)} \leq \|u\|_M. \quad (9.20)$$

Отметим, что в (9.18) инфимум достигается для тех функций $u(x)$, для которых $\|u\|_{(M)} > 0$. Это следует из неравенства (9.19), в котором (в силу теоремы Фату) можно перейти к пределу при k , стремящемся справа к $\|u\|_M$. Таким образом, имеет место неравенство

$$\rho\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}; M\right) = \int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right] dx \leq 1. \quad (9.21)$$

Нетрудно видеть, что в (9.21) имеет место знак равенства, если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Если же это условие не выполнено, то могут быть указаны такие функции, для которых $\rho\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}; M\right) < 1$. Нетрудно также видеть, что всегда из равенства

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{k_0}\right] dx = 1 \quad (9.22)$$

следует, что $k_0 = \|u\|_{(M)}$.

Покажем, что норма $\|u\|_{(M)}$ удовлетворяет обычным аксиомам.

1. Неравенство (9.19) удовлетворяется при любых k тогда и только тогда, когда $u(x) = 0$ почти везде. Поэтому $\|u\|_{(M)} = 0$ тогда и только тогда, когда $u(x) = 0$ почти везде.

2. Равенство $\|\alpha u\|_{(M)} = |\alpha| \|u\|_{(M)}$ следует из очевидных соотношений

$$\|\alpha u\|_{(M)} = \inf_{\rho\left(\frac{\alpha u}{k}; M\right) < 1} k = |\alpha| \inf_{\rho\left(\frac{u}{k_1}; M\right) < 1} k_1 = |\alpha| \|u\|_{(M)}.$$

3. Неравенство треугольника

$$\|u_1 + u_2\|_{(M)} \leq \|u_1\|_{(M)} + \|u_2\|_{(M)}$$

очевидно, если норма одной из функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ равна нулю. Если $\|u_1\|_{(M)} > 0$ и $\|u_2\|_{(M)} > 0$, то в силу (1.2)

$$\begin{aligned} M\left[\frac{u_1(x) + u_2(x)}{\|u_1\|_{(M)} + \|u_2\|_{(M)}}\right] &\leq \frac{\|u_1\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)} + \|u_2\|_{(M)}} M\left[\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{(M)}}\right] + \\ &+ \frac{\|u_2\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)} + \|u_2\|_{(M)}} M\left[\frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{(M)}}\right] \end{aligned}$$

и в силу (9.21)

$$\int_G M\left[\frac{u_1(x) + u_2(x)}{\|u_1\|_{(M)} + \|u_2\|_{(M)}}\right] dx \leq 1,$$

откуда и следует неравенство треугольника.

В качестве примера найдем $\|x(x; \mathcal{E})\|_{(M)}$ характеристической функции множества $\mathcal{E} \subset G$. Если $\text{mes } \mathcal{E} \neq 0$, то

$$\|x(x; \mathcal{E})\|_{(M)} = \frac{1}{M^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}}\right)}, \quad (9.23)$$

так как

$$\int_G M \left[x(x; \mathcal{E}) M^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}}\right) \right] dx = 1.$$

Теорема 9.5. *Единичный шар пространства L_M^* по норме $\|u\|_{(M)}$ совпадает со множеством функций $u(x) \in L_M$, для которых $\rho(u; M) \leq 1$. Более того, из $\|u\|_{(M)} \leq 1$ вытекает $\rho(u; M) \leq \|u\|_{(M)}$, а из $\|u\|_{(M)} > 1$ вытекает $\rho(u; M) \geq \|u\|_{(M)}$.*

Доказательство. Пусть $\|u\|_{(M)} \leq 1$. Тогда в силу (1.17) и (9.21)

$$\frac{1}{\|u\|_{(M)}} \int_G M[u(x)] dx \leq \int_G M \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} \right] dx \leq 1,$$

т. е. $\rho(u; M) \leq \|u\|_{(M)}$. Если же $\|u\|_{(M)} > 1$, то в силу (1.17) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\|u\|_{(M)} - \varepsilon} \int_G M[u(x)] dx \geq \int_G M \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)} - \varepsilon} \right] dx > 1,$$

откуда, в силу произвольности ε , $\rho(u; M) \geq \|u\|_{(M)}$.

Теорема доказана.

Покажем, что нормы $\|u\|_M$ и $\|u\|_{(M)}$ эквивалентны:

$$\|u\|_{(M)} \leq \|u\|_M \leq 2\|u\|_{(M)}. \quad (9.24)$$

Первое из этих неравенств уже было доказано. Второе вытекает из (9.12) и (9.21):

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_{(M)}} \right\|_M \leq \int_G M \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} \right] dx + 1 \leq 2.$$

Из теоремы 9.5 вытекает еще одна формула для определения нормы Орлича $\|u\|_M$:

$$\|u\|_M = \sup_{\|v\|_{(N)} \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right|. \quad (9.25)$$

Из (9.25) в свою очередь вытекают неравенства, которые естественно называть усиленными неравенствами Гёльдера:

$$\left| \int_G u(x) v(x) dx \right| \leq \|u\|_M \|v\|_{(N)} \quad (9.26)$$

$$(u(x) \in L_M^*, v(x) \in L_N^*)$$

и

$$\left| \int_G u(x) v(x) dx \right| \leq \|u\|_{(M)} \|v\|_N \quad (9.27)$$

$$(u(x) \in L_M^*, v(x) \in L_N^*).$$

§ 10. Пространство E_M

1. Определение. Через E_M будем обозначать замыкание в L_M^* множества ограниченных функций.

Как уже отмечалось, множество ограниченных функций всюду плотно в классе Орлича L_M в смысле сходимости в среднем. Из теоремы 9.4 вытекает, что при выполнении Δ_2 -условия множество ограниченных функций всюду плотно в пространстве Орлича $L_M^* = L_M$. Таким образом, если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, пространства E_M и L_M^* совпадают.

В случае, когда N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, E_M является правильной частью L_M^* . Это вытекает из следующего включения:

$$E_M \subset L_M. \quad (10.1)$$

Докажем это включение. Пусть $u_0(x) \in E_M$ и $u_1(x)$ такая ограниченная функция, что $\|u_0 - u_1\|_M < \frac{1}{2}$. Тогда в силу (9.13)

$$\int_G M[2u_0(x) - 2u_1(x)] dx \leq 2\|u_0 - u_1\|_M < 1.$$

Значит, $2u_0(x) - 2u_1(x) \in L_M$. Так как ограниченные функции принадлежат L_M , то из выпуклости множества L_M следует, что функция $u_0(x) = \frac{1}{2}[2u_0(x) - 2u_1(x)] + \frac{1}{2}[2u_1(x)]$ также принадлежит L_M .

2. Сепарабельность E_M . Пусть $u(x)$ — некоторая ограниченная функция: $|u(x)| \leq a$. В силу теоремы Лузина можно указать такую последовательность непрерывных функций $u_n(x)$, $|u_n(x)| \leq a$, что разность $u(x) - u_n(x)$ отлична от нуля только на множестве $G_n \subset G$, мера которого меньше $\frac{1}{n}$. Тогда в силу формулы (9.11) для нормы характеристической функции

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_M &= \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G [u(x) - u_n(x)] v(x) dx \right| \leq \\ &\leq 2a \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_{G_n} |v(x)| dx = 2a \|v(x; G_n)\|_M = \\ &= 2a \text{mes } G_n N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G_n} \right) \leq \frac{2a}{n} N^{-1}(n), \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_M = 0.$$

Таким образом, в пространстве E_M всюду плотно множество непрерывных функций.

Для каждой непрерывной на G функции $u(x)$ можно указать последовательность многочленов с рациональными коэффициентами, равномерно сходящуюся к $u(x)$. Легко видеть, что такая последовательность сходится к $u(x)$ и по норме любого пространства Орлича. Следовательно, в пространстве E_M всюду плотно счетное множество многочленов с рациональными коэффициентами.

Таким образом, пространство E_M сепарабельно.

3. Расположение класса L_M относительно пространства E_M . Как уже было показано, $E_M \subset L_M$. Через $\bar{\Pi}(E_M; r)$ будем обозначать совокупность функций $u(x) \in L_M^*$, для которых

$$d(u, E_M) = \inf_{w \in E_M} \|u - w\|_M < r.$$

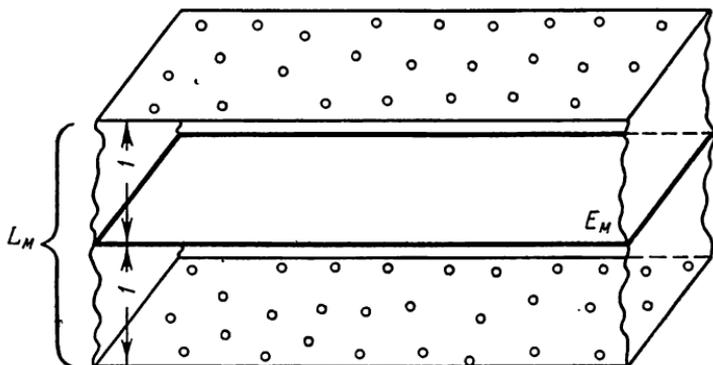
Через $\bar{\bar{\Pi}}(E_M; r)$ будем обозначать замыкание $\bar{\Pi}(E_M; r)$.

Расположение класса L_M относительно пространства E_M достаточно полно описывается следующей теоремой (черт. 7).

Теорема 10.1. Пусть N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда

$$\Pi(E_M; 1) \subset L_M \subset \overline{\Pi}(E_M; 1). \quad (10.2)$$

Причем $\Pi(E_M; 1)$ является правильной частью L_M , а L_M — правильной частью $\overline{\Pi}(E_M; 1)$.



Черт. 7.

Доказательство. Докажем вначале, что каждая функция $u_0(x) \in E_M$ содержится в L_M вместе с открытой шаровой окрестностью радиуса 1. Этим будет доказано первое включение (10.2).

Пусть $u(x) \in L_M^*$ и $\|u - u_0\|_M < 1$. Тогда найдется такое число $\alpha > 0$, что $\|u - u_0\|_M < 1 - \alpha$. Так как множество E_M линейно, то функция $\frac{1}{\alpha} u_0(x) \in E_M$ и в силу (10.1) $\frac{1}{\alpha} u_0(x) \in L_M$. Так как $\left\| \frac{u - u_0}{1 - \alpha} \right\|_M < 1$, то в силу (9.14) $\frac{u(x) - u_0(x)}{1 - \alpha} \in L_M$. Из выпуклости множества L_M вытекает, что и функция $u(x) = (1 - \alpha) \left[\frac{u(x) - u_0(x)}{1 - \alpha} \right] + \alpha \frac{u_0(x)}{\alpha}$ принадлежит L_M .

Для доказательства второго включения (10.2) покажем, что каждая функция $u(x) \in L_M$ находится на расстоянии не большем единицы от E_M .

В силу абсолютной непрерывности интеграла для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая ограниченная функция $u_\varepsilon(x) \in E_M$, что

$$\int_G M[u(x) - u_\varepsilon(x)] dx < \varepsilon.$$

Тогда в силу неравенства (9.12) $\|u - u_\varepsilon\|_M < 1 + \varepsilon$, откуда

$$d(u, E_M) = \inf_{w \in E_M} \|u - w\|_M \leq \|u - u_\varepsilon\|_M < 1 + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $d(u, E_M) \leq 1$.

Осталось доказать строгость включений (10.2).

В пункте 4 из § 8 была построена такая функция $u_*(x) \in L_M$, что при $\beta \leq 1$ $\beta u_*(x) \in L_M$, а при $\beta > 1$ $\beta u_*(x) \notin L_M$. Покажем, что $u_*(x) \in \Pi(E_M; 1)$. Действительно, если бы $d(u_*, E_M)$ было меньше единицы, то нашлось бы такое $\beta > 1$, что

$$d(\beta u_*, E_M) = \inf_{w \in E_M} \|\beta u_* - w\|_M = \beta \inf_{w \in E_M} \|u_* - w\|_M < 1.$$

Отсюда в силу первого включения (10.2) следовало бы, что $\beta u_*(x) \in L_M$ вопреки основному свойству функции $u_*(x)$. Таким образом, доказано, что $\Pi(E_M; 1)$ является правильной частью L_M .

В том же пункте 4 из § 8 построена такая функция $u^*(x) \in L_M$, что $\beta u^*(x) \in L_M$ при $\beta < 1$ и $\beta u^*(x) \notin L_M$ при $\beta \geq 1$. Покажем, что $u^*(x) \in \bar{\Pi}(E_M; 1)$. Этим доказательство теоремы будет завершено.

Действительно, $d(u^*, E_M) = 1$, так как в противном случае найдется такое $\beta < 1$, что $d(\beta u^*, E_M) > 1$, откуда следует в силу второго включения (10.2), что $\beta u^*(x) \notin L_M$ вопреки основному свойству функции $u^*(x)$.

Теорема доказана.

Вторая часть утверждения теоремы означает, что класс L_M не является ни открытым, ни замкнутым множеством в пространстве L_M^* , если N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Предоставляем читателю показать, что множество L_M при этом не полно в смысле сходимости в среднем.

Из теоремы 8.2 вытекает следующее замечание: если N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то множество

ограниченных функций нигде не плотно в L_M^* , так как все ограниченные функции лежат в E_M .

Пространство E_M можно было бы определить как максимальное линейное подпространство пространства L_M^* , содержащееся в L_M . Это следует из того, что $u(x) \in E_M$ только в том случае, если $\lambda u(x) \in L_M$ при всех значениях λ .

Допустим, что $u(x) \in L_M^*$ и

$$d(u, E_M) = \inf_{w \in E_M} \|u - w\|_M > 0.$$

Тогда функцию $u(x)$ можно по норме L_M^* аппроксимировать ограниченной функцией с точностью до $d(u, E_M) + \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. В ряде случаев удобно аппроксимирующие ограниченные функции выбирать специальным образом.

Лемма 10.1. Для любой функции $u(x) \in L_M^$ имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_M = d(u, E_M),$$

где

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } |u(x)| \leq n, \\ 0, & \text{если } |u(x)| > n. \end{cases}$$

Доказательство. Функции $|u(x) - u_n(x)|$ не возрастают при $n \rightarrow \infty$. Поэтому нормы их не возрастают и имеют предел. Очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_M \geq d(u, E_M).$$

Остается доказать противоположное неравенство.

Пусть ε — произвольное положительное число и

$$\frac{1}{d(u, E_M) + 2\varepsilon} < \alpha < \frac{1}{d(u, E_M) + \varepsilon}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d(\alpha u, E_M) &= \inf_{w \in E_M} \|\alpha u - w\|_M = \alpha \inf_{w \in E_M} \|u - w\|_M < \\ &< \frac{d(u, E_M)}{d(u, E_M) + \varepsilon} < 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_G M[\alpha u(x)] dx < \infty.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла можно указать такое n_0 , что при $n \geq n_0$

$$\int_G M[\alpha u(x) - \alpha u_n(x)] dx < \alpha \varepsilon,$$

откуда следует, что $\|\alpha u - \alpha u_n\|_M < 1 + \alpha \varepsilon$, т. е. что $\|u - u_n\|_M < \frac{1}{\alpha} + \varepsilon < d(u, E_M) + 3\varepsilon$, и в силу произвольности ε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_M \leq d(u, E_M).$$

Лемма доказана.

4. Необходимое условие сепарабельности пространства Орлича. Как было показано выше, пространство E_M всегда сепарабельно. Значит, сепарабельно и пространство $L_M^* = L_M = E_M$, если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Теорема 10.2. Пусть N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда пространство L_M^* несепарабельно.

Доказательство. Допустим, что L_M^* сепарабельно и пусть $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — счетное всюду плотное в L_M^* множество. В силу теоремы Лузина можно указать множество $G_1 \subset G$ ненулевой меры, на котором функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны.

Рассмотрим пространство $L_M^*(G_1)$ и обозначим через $E_M(G_1)$ замыкание в $L_M^*(G_1)$ множества ограниченных на G_1 функций. Тогда функции $w_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), определенные на G_1 и совпадающие на этом множестве с соответствующими функциями $u_n(x)$, принадлежат $E_M(G_1)$.

В силу теоремы 10.1 найдется такая функция $w(x) \in L_M^*(G_1)$, что $d(w, E_M(G_1)) > 1$. Положим

$$u(x) = \begin{cases} w(x), & \text{если } x \in G_1, \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus G_1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_M &= \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G [u(x) - u_n(x)] v(x) dx \right| \geq \\ &\geq \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_{G_1} [u(x) - u_n(x)] v(x) dx \right| = \|w - w_n\|_M > 1. \end{aligned}$$

Значит, последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) не плотна в пространстве L_M^* . Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

5. Об определении нормы. Так как $E_N \subset L_N$, то

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\rho(v; N) \leq 1 \\ v \in E_N}} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| &\leq \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| = \\ &= \|u\|_M. \quad (10.3) \end{aligned}$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такая функция $v_0(x) \in L_N$, удовлетворяющая условию $\rho(v_0; N) \leq 1$, что

$$\int_G u(x) v_0(x) dx \geq \|u\|_M - \varepsilon.$$

Положим

$$v_n(x) = \begin{cases} v_0(x), & \text{если } |v_0(x)| \leq n, \\ 0, & \text{если } |v_0(x)| > n. \end{cases}$$

Очевидно, $v_n(x) \in E_N$ и

$$\rho(v_n; N) \leq \rho(v_0; N) \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из абсолютной непрерывности интеграла следует, что при достаточно больших n

$$\int_G u(x) v_n(x) dx \geq \int_G u(x) v_0(x) dx - \varepsilon \geq \|u\|_M - 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{\rho(v; N) \leq 1 \\ v \in E_N}} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| \geq \int_G u(x) v_n(x) dx \geq \|u\|_M - 2\varepsilon.$$

Из полученного неравенства и (10.3) в силу произвольности ε вытекает новое представление для нормы в пространстве L_M^* :

$$\|u\|_M = \sup_{\substack{\rho(v; N) \leq 1 \\ v \in E_N}} \left| \int_G u(x)v(x) dx \right|. \quad (10.4)$$

Мы показали, что формула (10.4) определяет норму в пространстве Орлича, уже предполагая, что $u(x) \in L_M^*$. Рассуждения, подобные доказательству теоремы 9.1, показывают, что принадлежность функции $u(x)$ пространству L_M^* вытекает из конечности интегралов $\int_G u(x)v(x) dx$ для всех $v(x) \in E_N$. Модификация доказательства теоремы 9.1 заключается в том, что функции $v_n(x)$ выбираются из E_N ; функция $g(x)$ также принадлежит E_N , так как ряд, определяющий эту функцию, сходится по норме, а E_N замкнуто.

6. Абсолютная непрерывность нормы. Будем говорить, что функция $u(x) \in L_M^*$ имеет *абсолютно непрерывную норму*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\|u(x, \mathcal{E})\|_M = \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_{\mathcal{E}} u(x)v(x) dx \right| < \varepsilon,$$

коль скоро $\text{mes } \mathcal{E} < \delta$ ($\mathcal{E} \subset G$).

Теорема 10.3. *Функция $u(x) \in L_M^*$ имеет абсолютно непрерывную норму тогда и только тогда, когда $u(x) \in E_M$.*

Доказательство. Пусть $u(x) \in E_M$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим через $u_1(x)$ такую ограниченную функцию, $|u_1(x)| \leq a$ ($x \in G$), что

$$\|u - u_1\|_M < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как функция $vN^{-1} \left(\frac{1}{v} \right)$ монотонно возрастает при $v \geq 0$, то уравнение

$$\delta N^{-1} \left(\frac{1}{\delta} \right) = \frac{\varepsilon}{2a}$$

имеет единственное решение $\delta > 0$.

Пусть $\text{mes } \mathcal{E} < \delta$ ($\mathcal{E} \subset G$). Тогда в силу формулы (9.11) для нормы характеристической функции

$$\begin{aligned} \|u\chi(x; \mathcal{E})\|_M &\leq \|u - u_1\|_M + a \|\chi(x; \mathcal{E})\|_M \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + a \text{mes } \mathcal{E} N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + a\delta N^{-1} \left(\frac{1}{\delta} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Абсолютная непрерывность нормы функции $u(x) \in E_M$ доказана.

Пусть теперь норма функции $u(x) \in L_M^*$ абсолютно непрерывна. Обозначим через G_n множества $G \{ |u(x)| \leq n \}$. Так как функция $u(x)$ суммируема, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(G \setminus G_n) = 0$,

откуда в силу абсолютной непрерывности нормы вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u\chi(x; G_n)\|_M = 0.$$

Таким образом, $u(x)$ как предел последовательности ограниченных функций принадлежит E_M .

Теорема доказана.

Из теоремы 10.3 вытекает, что пространство E_M можно определить как совокупность функций с абсолютно непрерывными нормами в L_M^* .

Из этой же теоремы следует, что все функции пространства L_M^* имеют абсолютно непрерывные нормы тогда и только тогда, когда N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

7. Вычисление нормы. Обычная формула

$$\|u\|_M = \sup_{p(v; N) \leq 1} \left| \int_G u(x)v(x) dx \right|$$

не позволяет производить фактическое вычисление нормы. В связи с этим возникает задача о других выражениях для нормы.

Теорема 10.4. Пусть $u(x) \in L_M^*$ и пусть существует такое положительное число k^* , что

$$\int_G N[p(k^*|u(x)|)] dx = 1, \quad (10.5)$$

где $p(u)$ — правая производная N -функции $M(u)$.

Тогда

$$\|u\|_M = \int_G p(k^* |u(x)|) |u(x)| dx. \quad (10.6)$$

Доказательство. В силу (10.5)

$$\int_G p(k^* |u(x)|) |u(x)| dx \leq \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| = \|u\|_M.$$

С другой стороны, в силу неравенства Юнга

$$\begin{aligned} \|u\|_M &= \frac{1}{k^*} \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G k^* u(x) v(x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{k^*} \left(1 + \int_G M[k^* u(x)] dx \right) \end{aligned}$$

и в силу (10.5)

$$\|u\|_M \leq \frac{1}{k^*} \left(\int_G N[p(k^* |u(x)|)] dx + \int_G M[k^* u(x)] dx \right).$$

Используя (2.7), получаем:

$$\|u\|_M \leq \frac{1}{k^*} \int_G p(k^* |u(x)|) k^* |u(x)| dx = \int_G p(k^* |u(x)|) |u(x)| dx.$$

Теорема доказана.

При отыскании числа k^* уравнение (10.5) в силу (2.7) может быть записано в виде

$$k^* \int_G |u(x)| p(k^* |u(x)|) dx - \int_G M[k^* u(x)] dx = 1. \quad (10.7)$$

Отсюда видно, что при использовании теоремы 10.4 для вычисления нормы нужно знать только N -функцию $M(u)$ и ее производную $p(u)$.

Заметим, что постоянная k^* , при которой выполняется равенство (10.5), может быть найдена не всегда. Например, если функция $p(u)$ разрывна, то число k^* нельзя указать даже для характеристической функции множества G , если $N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } G}\right)$ не принадлежит множеству значений функции $p(u)$.

С другой стороны, если функция $p(u)$ имеет интервалы постоянства, то число k^* определяется неоднозначно.

Если функция $p(u)$ непрерывна, то число k^* может быть указано для любой ограниченной функции. Это следует из того факта, что функция

$$J(k) = \int_G N[p(k|u(x)|)] dx$$

определена при всех $k > 0$ и непрерывна, причем $J(0) = 0$, $J(\infty) = \infty$.

Ниже (см. § 18, п. 10) будет показано, что число k^* может быть найдено для любой функции $u(x) \in E_M$, если только функция $p(u)$ непрерывна.

Формула (10.6) позволяет производить фактическое вычисление нормы с любой точностью. Это вычисление сводится к приближенному решению уравнения (10.5) относительно k^* и затем к вычислению интеграла (10.6).

Заметим, что теорема 10.4 позволяет для случая непрерывной функции $p(u)$ получить уже известную нам формулу для нормы характеристической функции.

Вычислим в качестве примера норму функции $u(x) = x$ в пространстве $L_M^*([0, 1])$, где $M(u) = e^{|u|} - |u| - 1$. Так как в этом случае

$$N[p(u)] = ue^u - e^u + 1,$$

то уравнение (10.5) имеет вид

$$\int_0^1 (k^* x e^{k^* x} - e^{k^* x} + 1) dx = 1.$$

Отсюда получаем, что k^* — положительный корень уравнения

$$e^k = \frac{2}{2 - k}. \quad (10.8)$$

Значение нормы определится формулой (10.6):

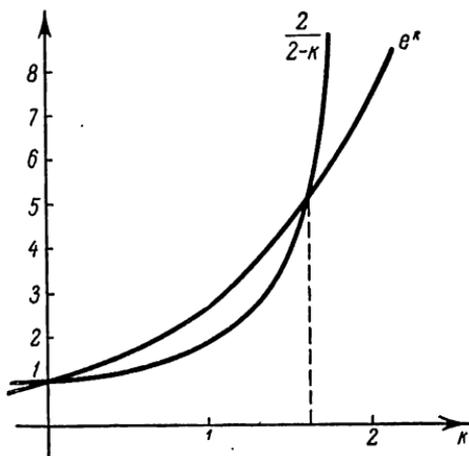
$$\|u\|_M = \int_0^1 (e^{k^* x} - 1) x dx,$$

откуда в силу (10.8)

$$\|u\|_M = \frac{1}{k^*(2 - k^*)} - \frac{1}{2}.$$

Уравнение (10.8) можно решить приближенно (например, графически — черт. 8). Оказывается, что $k^* \approx 1,587$. Таким образом, $\|u\|_M \approx 1,027$.

Теоремой 10.4 удобно пользоваться для вычисления норм ограниченных функций. Заметим, что для любой функции



Черт. 8.

$u(x) \in L_M^*$ можно построить такую последовательность ограниченных функций $u_n(x)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_M = \|u\|_M.$$

Функции $u_n(x)$ можно определить, например, равенствами:

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } |u(x)| \leq n, \\ 0, & \text{если } |u(x)| > n. \end{cases} \quad (10.9)$$

Действительно, $\|u_1\|_M \leq \|u_2\|_M \leq \dots \leq \|u_n\|_M \leq \dots \leq \|u\|_M$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такая функция $v_0(x)$, что $\rho(v_0; N) \leq 1$ и

$$\int_G |u(x) v_0(x)| dx > \|u\|_M - \varepsilon.$$

В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла при достаточно больших n

$$\int_G |u_n(x) v_0(x)| dx > \|u\|_M - \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_M \geq \|u\|_M - \varepsilon$. В силу произвольности ε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_M \geq \|u\|_M.$$

8. Еще одна формула для нормы. В условиях теоремы 10.4

$$\|u\|_M = \frac{1}{k^*} \left(1 + \int_G M[k^* u(x)] dx \right).$$

С другой стороны, для любой функции $u(x) \in L_M^*$ при любом $k > 0$

$$\|u\|_M = \frac{1}{k} \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G ku(x) v(x) dx \right| \leq \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M[ku(x)] dx \right). \quad (10.10)$$

Поэтому в условиях теоремы 10.4

$$\|u\|_M = \min_{k > 0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M[ku(x)] dx \right).$$

Оказывается, что эта формула обобщается.

Теорема 10.5 Пусть $M(u)$ — произвольная N -функция и $u(x) \in L_M^*$. Имеет место формула

$$\|u\|_M = \inf_{k > 0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M[ku(x)] dx \right). \quad (10.11)$$

Доказательство. Предположим вначале, что функция $\rho(u)$ непрерывна. Тогда норму каждой ограниченной функции можно будет определить по формулам (10.5) и (10.6). Уже было показано, что в этом случае норма определяется и формулой (10.11).

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из L_M^* . Пусть функции $u_n(x)$ определяются равенствами (10.9) и

$$\|u_n\|_M = \frac{1}{k_n} \left(1 + \int_G M[k_n u_n(x)] dx \right), \quad (10.12)$$

где

$$\int_G N[p(k_n | u_n(x) |)] dx = 1.$$

Из последнего равенства вытекает, что k_n не возрастают. При этом

$$\frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n} \left(1 + \int_G M[k_n u_n(x)] dx \right) = \|u_n\|_M \leq \|u\|_M.$$

Следовательно, последовательность k_n сходится к некоторому положительному числу k^* .

Пусть задано $\varepsilon > 0$. При достаточно больших n в силу 10.12)

$$1 + \int_G M[k_n u_n(x)] dx = k_n \|u_n\|_M < (k^* + \varepsilon) \|u\|_M.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу (что можно сделать в силу теоремы Фату), получаем:

$$1 + \int_G M[k^* u(x)] dx \leq \|u\|_M (k^* + \varepsilon),$$

и в силу произвольности ε

$$\frac{1}{k^*} \left(1 + \int_G M[k^* u(x)] dx \right) \leq \|u\|_M.$$

Из этого неравенства и (10.10) вытекает равенство (10.11).

Освободимся теперь от предположения о непрерывности $p(u)$. Какова бы ни была N -функция $M(u)$, легко построить такую N -функцию $M_1(u)$ с непрерывной производной, что

$$M(u) < M_1(u) < M((1 + \varepsilon)u) \quad (u > 0). \quad (10.13)$$

Из этих неравенств вытекает, что *) $L_M^* = L_{M_1}^*$ и

$$\|u\|_M \leq \|u\|_{M_1} \leq (1 + \varepsilon) \|u\|_M. \quad (10.14)$$

Из тех же неравенств (10.13) вытекает, что

$$\begin{aligned} \inf_{k > 0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M[ku(x)] dx \right) &\leq \inf_{k > 0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M_1[ku(x)] dx \right) \leq \\ &\leq (1 + \varepsilon) \inf_{k > 0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M[ku(x)] dx \right) \end{aligned}$$

откуда по уже доказанному

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \|u\|_{M_1} \leq \inf_{k > 0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M[ku(x)] dx \right) \leq \|u\|_{M_1}.$$

Из этих неравенств и (10.14) вытекает, что

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \|u\|_M \leq \inf_{k > 0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M[ku(x)] dx \right) \leq (1 + \varepsilon) \|u\|_M.$$

Так как ε произвольно, то для функции $u(x)$ справедлива формула (10.11).

Теорема доказана.

§ 11. Признаки компактности

1. Теорема Валле-Пуссена. Напомним, что семейство \mathfrak{N} функций $\varphi(x)$ имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $h > 0$, что для всех функций семейства \mathfrak{N}

$$\int_{\mathfrak{E}} |\varphi(x)| dx < \varepsilon,$$

коль скоро $\text{mes } \mathfrak{E} < h$. Общий признак равномерно абсолютно непрерывности интегралов некоторого семейства функций дает следующая

*) Более сильные предложения доказываются ниже в § 13, пп. 1 и 2.

Теорема Валле-Пуссена (см., например, [38], стр. 142). Пусть $\Phi(u)$ ($0 \leq u < \infty$) — монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty.$$

Пусть для функций $\varphi(x)$ некоторого семейства \mathfrak{N} интегралы от функций $\Phi[|\varphi(x)|]$ равномерно ограничены:

$$\int_G \Phi[|\varphi(x)|] dx \leq A < \infty \quad (\varphi(x) \in \mathfrak{N}). \quad (11.1)$$

Тогда семейство \mathfrak{N} имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы.

Эта простая теорема доказана в [38] при несколько более жестких предположениях.

Каждая N -функция $M(u)$ удовлетворяет условиям теоремы Валле-Пуссена. Поэтому, если семейство функций \mathfrak{N} содержится в L_M и

$$\rho(u; M) = \int_G M[u(x)] dx \leq A \quad (u(x) \in \mathfrak{N}), \quad (11.2)$$

то функции $u(x)$ имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы.

Пусть теперь $M(u)$ и $M_1(u)$ — две N -функции, для которых

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{M_1(u)} = \infty.$$

Тогда из (11.2) следует, что семейство функций $\mathfrak{N}_1 = \{M_1[u(x)]\}$ имеет на G равномерно абсолютно непрерывные интегралы. Для доказательства достаточно заметить, что функция $\Phi(u) = M[M_1^{-1}(u)]$ удовлетворяет условиям теоремы Валле-Пуссена, так как

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M[M_1^{-1}(u)]}{u} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{M(v)}{M_1(v)} = \infty.$$

2. Функции Стеклова. Пусть $u(x)$ — некоторая суммируемая на G функция. Функцией Стеклова $u_r(x)$ называется функция

$$u_r(x) = \frac{1}{m_r} \int_{T_r(x)} u(t) dt \quad (x \in G), \quad (11.3)$$

где $T_r(x)$ — n -мерный шар радиуса r с центром в точке $x \in G$, m_r — объем этого шара. В интеграле (11.3) мы полагаем функцию $u(t)$ равной нулю при $t \notin G$.

Лемма 11.1: Пусть задано семейство функций $\mathfrak{N} \subset L_M^*$ с равномерно ограниченными нормами $\|u\|_M \leq A$ ($u(x) \in \mathfrak{N}$). Тогда семейство \mathfrak{N}_r функций Стеклова $u_r(x)$ ($u(x) \in \mathfrak{N}$) компактно по равномерной норме (в пространстве C непрерывных на G функций).

Доказательство. Так как при $u(x) \in \mathfrak{N}$

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{A}\right] dx \leq \int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_M}\right] dx \leq 1, \quad (11.4)$$

то в силу неравенства Юнга

$$\begin{aligned} |u_r(x)| &\leq \frac{1}{m_r} \int_{T_r(x)} |u(t)| dt \leq \frac{A}{m_r} \int_G \frac{|u(x)|}{A} dx \leq \\ &\leq \frac{A}{m_r} (1 + N(1) \text{mes } G). \end{aligned}$$

Таким образом, функции семейства \mathfrak{N}_r равномерно ограничены.

Из теоремы Валле-Пуссена в силу (11.4) вытекает, что функции семейства \mathfrak{N} имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы, т. е. для данного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $h > 0$, что для всех функций семейства

$$\int_{\mathfrak{E}} |u(x)| dx < \varepsilon, \quad (11.5)$$

как только $\text{mes } \mathfrak{E} < h$ ($\mathfrak{E} \subset G$).

Обозначим через $T_{x,y}$ множество

$$(T_r(x) \cup T_r(y)) \setminus (T_r(x) \cap T_r(y)).$$

Пусть объем $T_{x,y}$ меньше h при $d(x,y) < \delta$. Тогда для всех функций семейства \mathfrak{N}_r в силу (11.5) при $d(x,y) < \delta$

$$|u_r(x) - u_r(y)| \leq \frac{1}{m_r} \int_{T_{x,y}} |u(t)| dt < \frac{\varepsilon}{m_r},$$

откуда следует, что функции семейства \mathfrak{N}_r равномерно непрерывны.

Утверждение леммы следует из теоремы Арцела.

В дальнейшем будет использовано следующее неравенство:

$$\|u_r\|_M \leq \|u\|_M. \quad (11.6)$$

Для его доказательства обозначим через T_0 шар радиуса r с центром в нуле n -мерного пространства. Тогда

$$\begin{aligned} \|u_r\|_M &\leq \frac{1}{m_r} \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_G \int_{T_r(x)} |u(t)v(x)| dt dx = \\ &= \frac{1}{m_r} \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_G \int_{T_0} |u(x+s)v(x)| ds dx. \end{aligned}$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования и внося знак \sup под знак интеграла, получим:

$$\begin{aligned} \|u_r\|_M &\leq \frac{1}{m_r} \int_{T_0} \left[\sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_G |u(x+s)v(x)| dx \right] ds = \\ &= \|u(x+s)\|_M, \end{aligned}$$

и так как $u(t) = 0$ при $t \notin G$, то

$$\begin{aligned} \|u(x+s)\|_M &= \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_G |u(x+s)v(x)| dx \leq \\ &\leq \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_G |u(t)v(t-s)| dt \leq \|u\|_M. \quad (11.7) \end{aligned}$$

Неравенство (11.6) доказано.

3. Признак компактности А. Н. Колмогорова для пространства E_M .

Теорема 11.1. Семейство \mathfrak{N} функций пространства E_M компактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:

- $\|u\|_M \leq A$ ($u(x) \in \mathfrak{N}$);
- для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из условия $r < \delta$ следует

$$\|u - u_r\|_M < \varepsilon$$

для всех функций семейства \mathfrak{N} .

Доказательство. Достаточность условий а) и б) непосредственно следует из леммы 11.1 и теоремы Фреше*), так как множество функций, компактное в C , компактно и в каждом пространстве Орлича.

Пусть \mathfrak{N} — компактное семейство функций из E_M . Тогда для этого семейства можно построить $\frac{\varepsilon}{3}$ -сеть, состоящую из непрерывных функций $u^{(1)}(x)$, $u^{(2)}(x)$, ..., $u^{(n)}(x)$. Функции $u^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) могут и не принадлежать семейству \mathfrak{N} . Обозначим через χ норму характеристической функции $\chi(x; G)$ всего множества G . Пусть $r > 0$ такое число, что при $d(x, t) < r$

$$|u^{(i)}(x) - u^{(i)}(t)| < \frac{\varepsilon}{3c} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда

$$|u_r^{(i)}(x) - u^{(i)}(x)| \leq \frac{1}{m_r} \int_{T_r(x)} |u^{(i)}(t) - u^{(i)}(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3c} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$\|u_r^{(i)} - u^{(i)}\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3c} \|\chi(x; G)\|_M = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (11.8)$$

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из \mathfrak{N} . Найдется такая функция $u^{(i_0)}(x)$, что $\|u - u^{(i_0)}\|_M < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда в силу (11.6) и (11.8)

$$\|u - u_r\|_M \leq \|u - u^{(i_0)}\|_M + \|u^{(i_0)} - u_r^{(i_0)}\|_M + \|u_r^{(i_0)} - u_r\|_M \leq \\ \leq 2\|u - u^{(i_0)}\|_M + \|u^{(i_0)} - u_r^{(i_0)}\|_M < \varepsilon.$$

Таким образом, необходимость условия б) доказана. Необходимость условия а) очевидна.

Теорема доказана.

В случае, когда N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, $E_M = L_M = L_M^*$. Поэтому в случае выполнения Δ_2 -условия теорема 11.1 дает необходимый и достаточный признак

*) Теорема Фреше. Множество компактно, если его можно как угодно точно аппроксимировать компактным множеством.

компактности семейства функций из L_M . Так как в этом случае сходимость по норме эквивалентна сходимости в среднем, то справедлива

Теорема 11.2. Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Для того чтобы семейство функций $\mathfrak{N} \subset L_M = L_M^*$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$а) \int_G M[u(x)] dx \leq A \quad (u(x) \in \mathfrak{N});$$

б) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех функций семейства \mathfrak{N} при $r < \delta$

$$\int_G M[u(x) - u_r(x)] dx < \varepsilon.$$

4. Второй признак компактности. Будем говорить, что семейство \mathfrak{N} функций $u(x) \in L_M^*$ имеет *равностепенно абсолютно непрерывные нормы*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех функций семейства $\|u(x; \mathfrak{E})\|_M < \varepsilon$ коль скоро $\text{mes } \mathfrak{E} < \delta$. Очевидно, что в этом случае $\mathfrak{N} \subset E_M$.

Если \mathfrak{N} — некоторое компактное в E_M множество, то обычными рассуждениями можно показать, что оно имеет равностепенно абсолютно непрерывные нормы.

Лемма 11.2. Для того чтобы сходящаяся по мере последовательность функций $u_n(x) \in E_M$ ($n = 1, 2, \dots$) сходилась по норме, необходимо и достаточно, чтобы она имела равностепенно абсолютно непрерывные нормы.

Доказательство. Необходимость условия вытекает из того, что сходящаяся последовательность компактна. Докажем достаточность условия леммы.

Пусть последовательность $u_n(x) \in E_M$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится по мере и имеет равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через \mathfrak{E}_{mn} множества $G \{ |u_n(x) - u_m(x)| > \eta \}$, где

$$\eta = \frac{\varepsilon}{3 \text{mes } GN^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G} \right)}.$$

Пусть $\delta > 0$ — такое число, что при $\text{mes } \mathcal{E} < \delta$

$$\|u_n \chi(x; \mathcal{E})\|_M < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Так как последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится по мере, то можно указать такое n_0 , что $\text{mes } \mathcal{E}_{mn} < \delta$ при $n, m > n_0$.

Тогда при $n, m > n_0$

$$\begin{aligned} & \|u_n - u_m\|_M \leq \\ & \leq \|(u_n - u_m)\chi(x; \mathcal{E}_{mn})\|_M + \|(u_n - u_m)\chi(x; G/\mathcal{E}_{mn})\|_M \leq \\ & \leq \|u_n\chi(x; \mathcal{E}_{mn})\|_M + \|u_m\chi(x; \mathcal{E}_{mn})\|_M + \eta\|\chi(x; G)\|_M < \varepsilon. \end{aligned}$$

Значит, последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится в L_M^* .

Лемма доказана.

Теорема 11.3. Пусть семейство $\mathfrak{N} \subset E_M$ имеет равномерно абсолютно непрерывные нормы и компактно в смысле сходимости по мере. Тогда семейство \mathfrak{N} компактно в L_M^* .

Доказательство. Из каждой последовательности семейства \mathfrak{N} можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по мере. В силу леммы 11.2 эта подпоследовательность сходится по норме L_M^* .

Теорема доказана.

Проверка второго условия теоремы о компактности в смысле сходимости по мере обычно сводится к доказательству того, что семейство \mathfrak{N} компактно в некотором пространстве Орлича, отличном от L_M^* .

Б. Признак компактности Ф. Рисса для пространств E_M . Укажем еще один признак компактности семейств функций из E_M .

Теорема 11.4. Семейство \mathfrak{N} функций пространства E_M компактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:

а) $\|u\|_M \leq A \quad (u(x) \in \mathfrak{N});$

б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из условия $d(h, 0) < \delta$ вытекает

$$\|u(x+h) - u(x)\|_M < \varepsilon$$

для всех $u(x) \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть $u(x) \in \mathfrak{M}$ и $u_r(x)$ — соответствующая функция Стеклова. Тогда

$$|u(x) - u_r(x)| \leq \frac{1}{m_r} \int_{T_r(x)} |u(x) - u(t)| dt,$$

откуда для $v(x) \in L_N$, $\rho(v; N) \leq 1$

$$\int_G |u_r(x) - u(x)| v(x) dx \leq \frac{1}{m_r} \int_G \left[\int_{T_r(x)} |u(t) - u(x)| dt \right] v(x) dx.$$

Изменяя порядок интегрирования и произведя замену переменных, получим:

$$\begin{aligned} \int_G |u(x) - u_r(x)| v(x) dx &\leq \\ &\leq \frac{1}{m_r} \int_{T_0} \left[\int_G |u(x+s) - u(x)| v(x) dx \right] ds \leq \\ &\leq \frac{1}{m_r} \int_{T_0} \|u(x+s) - u(x)\|_M ds, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|u - u_r\|_M &= \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_G [u(x) - u_r(x)] v(x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{m_r} \int_{T_0} \|u(x+s) - u(x)\|_M ds. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и вытекает, что при выполнении условия а) доказываемой теоремы выполняется условие б) теоремы 11.1. Условия а) этих теорем совпадают.

Достаточность условий теоремы доказана.

Докажем необходимость этих условий. Пусть \mathfrak{M} — компактное семейство функций из E_M . Тогда для этого семейства можно построить $\frac{\varepsilon}{3}$ -сеть, состоящую из непрерывных функций $u^{(1)}(x)$, $u^{(2)}(x)$, ..., $u^{(n)}(x)$. Обозначим через c норму характеристической функции всего множества G в пространстве L_M^* .

Пусть $\delta > 0$ — такое число, что при $d(h, 0) < \delta$

$$|u^{(i)}(x+h) - u^{(i)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3c} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Тогда, очевидно,

$$\|u^{(i)}(x+h) - u^{(i)}(x)\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11.9)$$

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из \mathfrak{U} . Найдется такая $u^{(i_0)}(x)$, что $\|u - u^{(i_0)}\|_M < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда в силу (11.9) и (11.7)

$$\begin{aligned} & \|u(x+h) - u(x)\|_M \leq \\ & \leq \|u(x+h) - u^{(i_0)}(x+h)\|_M + \|u^{(i_0)}(x+h) - u^{(i_0)}(x)\|_M + \\ & \quad + \|u^{(i_0)}(x) - u(x)\|_M < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимость условия б) доказана. Необходимость условия а) очевидна.

Теорема доказана.

§ 12. Существование базиса

1. Переход к пространству функций, заданных на отрезке. Ниже мы будем рассматривать пространства Орлича функций, заданных на конечном отрезке. При этом общность результатов не нарушается. Это следует из того, что пространство $L_M^*(G)$ линейно изометрично пространству $L_M^*([0, \text{mes } G])$, т. е. между элементами пространств $L_M^*([0, \text{mes } G])$ и $L_M^*(G)$ существует линейное взаимно однозначное соответствие, при котором нормы сохраняются.

Ради простоты изложения покажем это здесь для случая, когда G — ограниченное замкнутое множество, лежащее в плоскости с декартовой системой координат (ξ_1, ξ_2) .

Заключим множество G в некоторый квадрат B_0

$$(|\xi_1| \leq b, |\xi_2| \leq b).$$

Рассмотрим последовательность разбиений T_n квадрата B_0 на 4^n квадратов B_n^k ($k = 1, 2, \dots, 4^n$) прямыми

$$\xi_1 = \frac{b}{2^{n-1}}i \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{b}{2^{n-1}}j \quad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2^{n-1}).$$

При переходе от разбиения T_n к разбиению T_{n+1} , очевидно, каждый квадрат разбиения T_n разбивается на четыре равных квадрата разбиения T_{n+1} (черт. 9),

Построим отображение совокупности квадратов всех разбиений на совокупность некоторых отрезков — частей отрезка $I_0 = [0, \text{mes } G]$, при котором длина отрезка I_n^k — образа квадрата B_n^k — равна $\text{mes}(G \cap B_n^k)$. Пусть квадрату B_0 соответствует весь отрезок I_0 . Пусть некоторому квадрату B_n^k разбиения T_n соответствует отрезок $[\alpha, \beta] \subset I_0$. Перенумеруем

B_1^2	B_2^2	B_2^1	
	B_2^3	B_2^4	
B_1^3		B_3^2	B_3^1
		B_3^3	B_3^4

Черт. 9.

четыре квадрата разбиения T_{n+1} , из которых состоит B_n^k так, как нумеруются квадранты в аналитической геометрии и обозначим их через $B^I, B^{II}, B^{III}, B^{IV}$. Отрезок $[\alpha, \beta]$ разобьем точками $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, где $\alpha \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \beta$, на четыре части так, что

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \alpha &= \text{mes}(G \cap B^I), & \gamma_2 - \gamma_1 &= \text{mes}(G \cap B^{II}), \\ \gamma_3 - \gamma_2 &= \text{mes}(G \cap B^{III}), & \beta - \gamma_3 &= \text{mes}(G \cap B^{IV}). \end{aligned}$$

Квадратам B^I, B^{II}, B^{III} и B^{IV} отнесем, соответственно, отрезки $[\alpha, \gamma_1], [\gamma_1, \gamma_2], [\gamma_2, \gamma_3]$ и $[\gamma_3, \beta]$.

Всякому множеству $P \subset G$ отнесем множество $Q \subset I_0$, состоящее из точек, определяемых системами стягивающихся отрезков, которые соответствуют системам квадратов (разбиений T_n), стягивающихся к точкам множества P . При этом отображении мера множеств сохраняется (это становится

ясным, если заметить, что образ совокупности сторон квадратов всех разбиений T_n имеет меру нуль). Если через G_1 обозначить множество точек $x \in G$, любая окрестность которых содержит часть множества G положительной меры и которые не лежат на сторонах квадратов разбиений T_n , то

$$\text{mes } G_1 = \text{mes } G,$$

и построенное выше отображение σ множества G на отрезок I_0 будет взаимно однозначным на G_1 . Образ множества G_1 будем обозначать через Q_1 .

Так как функции, принадлежащие пространству Орлича, определяются с точностью до множества меры нуль, то можно считать, что все они равны нулю на $G \setminus G_1$. Поставим в соответствие каждой функции $u(x) \in L_M^*(G)$ функцию $\tilde{u}(t)$ ($t \in I_0$), определяемую равенством

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(x) & \text{при } t = \sigma(x) \in Q_1, \\ 0 & \text{при } t \in \bar{Q}_1. \end{cases}$$

Это соответствие, очевидно, линейно. Так как при отображении σ мера множеств сохраняется, то функции из $L_M^*(G)$ переходят с сохранением нормы в функции из пространства $L_M^*(I_0, \text{mes } G)$:

Очевидно также, что пространство $E_M(G)$ переходит при этом отображении в пространство $E_M(I_0, \text{mes } G)$.

2. Функции Хаара. Функциями Хаара называются функции, определенные на отрезке $[0, 1]$ формулами:

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1, \quad \chi_0^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } x = \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

и далее при $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, 2^n

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq x < \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{при остальных значениях } x. \end{cases}$$

Функции Хаара $\gamma_n^{(k)}(x)$ расположим в последовательность в порядке возрастания n , а при данном n — в порядке возрастания k . Полученную последовательность обозначим через $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$). Эта последовательность функций, как легко видеть, ортогональна:

$$\int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Так как все функции Хаара ограничены, то для любой суммируемой функций $u(x)$ определены коэффициенты Фурье c_i :

$$c_i = \int_0^1 u(x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (12.1)$$

Определим операторы S_m равенством

$$S_m u(x) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Через a_1, a_2, \dots, a_p обозначим расположенные в порядке возрастания точки разрыва функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$, к которым добавлены точки 0 и 1.

Лемма 12.1. При $a_s < x < a_{s+1}$ значение кусочно-постоянной функции $S_m u(x)$ определяется равенством

$$S_m u(x) = \frac{1}{a_{s+1} - a_s} \int_{a_s}^{a_{s+1}} u(x) dx.$$

Доказательство. Из определения функций Хаара непосредственно вытекает (это проще всего проверяется индукцией по m), что функция

$$F_m(x, y) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \varphi_i(y)$$

при $a_s < x < a_{s+1}$ принимает следующие значения:

$$F_m(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a_{s+1} - a_s}, & \text{если } a_s < y < a_{s+1}, \\ 0, & \text{если } y \leq a_s \text{ или } a_{s+1} < y. \end{cases}$$

Поэтому при $a_s < x < a_{s+1}$

$$\begin{aligned} S_m u(x) &= \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \int_0^1 u(y) \varphi_i(y) dy = \int_0^1 u(y) F_m(x, y) dy = \\ &= \frac{1}{a_{s+1} - a_s} \int_{a_s}^{a_{s+1}} u(y) dy. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. Базис в E_M . Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — взаимно дополняемые друг к другу N -функции.

Пусть $u(x)$ принадлежит пространству $L_M([0, 1])$. Из интегрального неравенства Йенсена и леммы 12.1 следует, что при каждом m и $a_s < x < a_{s+1}$

$$\begin{aligned} M[S_m u(x)] &= M \left[\frac{1}{a_{s+1} - a_s} \int_{a_s}^{a_{s+1}} u(x) dx \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{a_{s+1} - a_s} \int_{a_s}^{a_{s+1}} M[u(x)] dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_{a_s}^{a_{s+1}} M[S_m u(x)] dx \leq \int_{a_s}^{a_{s+1}} M[u(x)] dx$$

и

$$\int_0^1 M[S_m u(x)] dx \leq \int_0^1 M[u(x)] dx. \quad (12.2)$$

Если $\|u\|_M \leq 1$, то в силу (9.13)

$$\int_0^1 M[u(x)] dx \leq 1.$$

Поэтому из неравенств (12.2) и (9.12) следует, что при $\|u\|_M \leq 1$

$$\|S_m u\|_M \leq 1 + \int_0^1 M[S_m u(x)] dx \leq 1 + \int_0^1 M[u(x)] dx \leq 2.$$

Следовательно,

$$\|S_m\| = \sup_{\|u\|_M \leq 1} \|S_m u\|_M \leq 2 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, нормы линейных операторов S_m , действующих в пространстве $L_M^*([0, 1])$, ограничены в совокупности.

Пусть теперь функция $u(x)$ непрерывна. В силу леммы 12.1 последовательность $S_m u(x)$ сходится к $u(x)$ равномерно на отрезке $[0, 1]$, если из него выбросить счетное число точек разрыва всех функций Хаара. Поэтому функции $S_m u(x)$ сходятся к $u(x)$ и по норме в любом пространстве Орлича.

Итак, последовательность операторов S_m ($m = 1, 2, \dots$) имеет равномерно ограниченные нормы и сильно сходится к единичному оператору на плотном в $E_M([0, 1])$ множестве непрерывных функций. В силу известной теоремы Банаха—Штейнгауза операторы S_m сходятся к единичному оператору на всем $E_M([0, 1])$: Это значит, что для любой функции $u(x) \in E_M([0, 1])$ ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x), \quad (12.3)$$

где c_i определены равенством (12.1), сходится в L_M^* к $u(x)$.

Таким образом, функции Хаара $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) образуют базис в $E_M([0, 1])$.

Ясно, что функции $\varphi_i\left(\frac{x}{\text{mes } G}\right)$ ($i = 1, 2, \dots$), определенные на отрезке $[0, \text{mes } G]$, образуют базис в $E_M([0, \text{mes } G])$. Этот факт и рассуждения первого пункта этого параграфа приводят к следующему утверждению:

Теорема 12.1. *В пространстве $F_M(G)$ существует базис.*

Из этой теоремы вытекает, что существует базис во всем пространстве L_M^* , если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, так как в этом случае $E_M = L_M^*$.

Коэффициенты Фурье (12.1) определены для всех функций $u(x) \in L_M^*([0, 1])$, а не только для функций из $E_M([0, 1])$. Для тех функций $u(x) \in L_M^*([0, 1])$, для которых ряд (12.3)

сходится, можно было бы определить оператор P , положив

$$P u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x).$$

Оператор P был бы оператором проектирования на E_M .

Оказывается, что в множестве $L_M^* \setminus E_M$ нет таких функций, для которых сходится в L_M^* ряд (12.3). Пусть, действительно, ряд (12.3) для некоторой функции $u(x)$ сходится. Положим тогда

$$g(x) = u(x) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x).$$

Все коэффициенты Фурье (12.1) для функции $g(x)$ равны нулю. В силу теоремы 12.1 каждую функцию $v(x) \in E_N([0, 1])$ можно представить в виде сходящегося в $L_N^*([0, 1])$ ряда

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \varphi_i(x).$$

Это позволяет вычислить норму функции $g(x)$: в силу (10.4)

$$\begin{aligned} \|g\|_M &= \sup_{\substack{\rho(v; N) \leq 1 \\ v \in E_N}} \left| \int_0^1 g(x) v(x) dx \right| = \\ &= \sup_{\substack{\rho(v; N) \leq 1 \\ v \in E_N}} \left| \sum_{i=1}^{\infty} d_i \int_0^1 g(x) \varphi_i(x) dx \right| = 0. \end{aligned}$$

Значит, $g(x) = 0$ и $u(x) \in E_M([0, 1])$.

4. Еще раз об условии сепарабельности. В предыдущем параграфе было показано, что пространство L_M^* не сепарабельно, если N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Этот же факт можно доказать, указав эффективно континуальную совокупность функций в пространстве L_M^* , взаимные расстояния между которыми больше некоторого постоянного числа. Рассуждения первого пункта позволяют ограничиться построением такой совокупности в пространстве $L_M^*([0, 1])$.

Пусть N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, тогда найдется такая последовательность положительных чисел

$$u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots \rightarrow \infty,$$

что

$$M(2u_n) > 2^n M(u_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Построим на $[0, 1)$ последовательность непересекающихся отрезков δ_n , расположенных в порядке возрастания номеров слева направо, длины которых определяются равенствами

$$\text{mes } \delta_n = \frac{M(u_1)}{2^n M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Такое построение возможно, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{mes } \delta_n < 1.$$

Пусть, кроме того, единица есть предельная точка для $\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$.

Определим на $[0, 1]$ функцию $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} 2u_n & \text{при } x \in \delta_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{при } x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n}. \end{cases}$$

Функция $u(x)$ принадлежит L_M^* , так как $\frac{1}{2} u(x) \in L_M$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 M \left[\frac{1}{2} u(x) \right] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\delta_n} M \left[\frac{1}{2} u(x) \right] dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n) \text{mes } \delta_n < \infty. \end{aligned}$$

Пусть для всех $0 < \alpha \leq 1$ функции $\varphi_\alpha(x)$ определены равенством

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} u(x+1-\alpha) & \text{при } 0 \leq x \leq \alpha, \\ u(x-\alpha) & \text{при } \alpha < x \leq 1. \end{cases}$$

Все функции принадлежат L_M^* .

Рассмотрим две функции $\varphi_\alpha(x)$ и $\varphi_\beta(x)$, где $\alpha < \beta$.

Функция $\varphi_\beta(x)$ на отрезке $[0, \alpha]$ ограничена по построению. Пусть

$$|\varphi_\beta(x)| = \varphi_\beta(x) \leq A \quad (0 \leq x \leq \alpha).$$

Тогда можно указать такое положительное число $\eta < \alpha$, что

$$\|\varphi_\beta \chi_\eta\|_M < \frac{1}{2}, \quad (12.4)$$

где $\chi_\eta(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\alpha - \eta, \alpha]$. Действительно, в силу формулы (9.11) для нормы характеристической функции

$$\|\varphi_\beta \chi_\eta\|_M \leq A \|\chi_\eta\|_M = A \eta N^{-1} \left(\frac{1}{\eta}\right) < \frac{1}{2}$$

при достаточно малых η .

Оценим снизу норму функции $\varphi_\alpha(x) \chi_\eta(x)$. Очевидно, эта норма равна норме функции $u(x) \hat{\chi}_\eta(x)$, где $\hat{\chi}_\eta(x)$ — характеристическая функция отрезка $[1 - \eta, 1]$. Введем в рассмотрение множества

$$F_n = [1 - \eta, 1] \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \delta_i \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Характеристические функции этих множеств будем обозначать через $\chi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$). На каждом из множеств F_n функция $u(x)$ ограничена, так что функции $v_n(x) = p[u(x) \chi_n(x)]$ ($n = 1, 2, \dots$) тоже ограничены и, тем более, принадлежат классу L_N . В силу (2.7)

$$\int_0^1 u(x) v_n(x) dx = \int_{F_n} M[u(x)] dx + \int_0^1 N[v_n(x)] dx.$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 N[v_n(x)] dx > 1. \quad (12.5)$$

Действительно, если бы при всех $n = 1, 2, \dots$ было справедливо неравенство

$$\int_0^1 N[v_n(x)] dx \leq 1,$$

то функция $u(x)\hat{x}_\eta(x)$ принадлежала бы L_M , так как

$$\int_0^1 M[u(x)\hat{x}_\eta(x)] dx \leq \sup_{n=1, 2, \dots} \left\{ \int_{F_n} M[u(x)] dx + \right. \\ \left. + \int_{F_n} N[v_n(x)] dx \right\} = \sup_{n=1, 2, \dots} \int_0^1 u(x)v_n(x) dx \leq \\ \leq \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_0^1 u(x)v(x) dx = \|u\|_M < \infty,$$

что является противоречием, ибо

$$\int_0^1 M[u(x)\hat{x}_\eta(x)] dx = \int_0^1 M[u(x)] dx - \int_0^{1-\eta} M[u(x)] dx = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(2u_n)M(u_1)}{2^n M(u_n)} - \sup_{x \leq 1-\eta} M[u(x)] = \infty.$$

В силу (12.5) найдется такое n_0 , что

$$\int_0^1 N[v_{n_0}(x)] dx = \rho > 1.$$

Тогда в силу (1.17)

$$\int_0^1 N\left[\frac{v_{n_0}(x)}{\rho}\right] dx \leq 1.$$

Таким образом, для $\|u\hat{x}_0\|_M$ справедлива оценка:

$$\|u\hat{x}_\eta\|_M = \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_0^1 u(x)\hat{x}_\eta(x)v(x) dx \geq \\ \geq \int_0^1 u(x)\hat{x}_\eta(x)\frac{v_{n_0}(x)}{\rho} dx = \\ = \frac{1}{\rho} \left\{ \int_{F_{n_0}} M[u(x)] dx + \int_0^1 N[v_{n_0}(x)] dx \right\} > 1. \quad (12.6)$$

Из этого неравенства и (12.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|_M &\geq \|\varphi_\alpha x_\eta\|_M - \|\varphi_\beta x_\eta\|_M = \|u \hat{x}_\eta\|_M - \|\varphi_\beta x_\eta\|_M > \\ &> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $\varphi_\alpha(x)$ ($0 < \alpha \leq 1$) находятся на большем расстоянии друг от друга чем $\frac{1}{2}$.

§ 13. Пространства, определенные различными N -функциями

1. Сравнение пространств. Различные N -функции определяют, вообще говоря, различные пространства Орлича. Например, пространства L^α , определенные N -функциями $M(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$, при различных $\alpha > 1$ различны.

Теорема 13.1. Пусть $M_1(u)$ и $M_2(u)$ — две N -функции.

Для того чтобы

$$L_{M_1} \subset L_{M_2},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$M_2(u) \rightarrow M_1(u),$$

т. е. чтобы существовали такие постоянные $u_0, k > 0$, что

$$M_2(u) \leq M_1(ku) \quad (u \geq u_0). \quad (13.1)$$

Доказательство. Допустим, что условие (13.1) не выполняется. Тогда можно указать такую неограниченно возрастающую монотонную последовательность чисел u_n ($n = 1, 2, \dots$), что

$$M_2(u_n) > M_1(2^n u_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (13.2)$$

В силу (1.17)

$$\frac{M_1(nu_n)}{nu_n} \leq \frac{M_1(2^n nu_n)}{2^n nu_n},$$

откуда

$$M_1(2^n nu_n) \geq 2^n M_1(nu_n).$$

Объединяя последнее неравенство с (13.2), получим:

$$M_2(u_n) > 2^n M_1(nu_n). \quad (13.3)$$

Пусть G_1, G_2, \dots — непересекающиеся части множества G , для которых

$$\text{mes } G_n = \frac{M_1(u_1) \text{mes } G}{2^n M_1(nu_n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Такие множества можно построить, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{mes } G_n < \text{mes } G.$$

Рассмотрим функцию $u(x)$, определенную равенством

$$u(x) = \begin{cases} nu_n & \text{при } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{при } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases}$$

Эта функция принадлежит пространству $L_{M_1}^*$, так как

$$\begin{aligned} \int_G M_1[u(x)] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M_1[u(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(nu_n) \text{mes } G_n = \\ &= M(u_1) \text{mes } G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

Однако эта функция не принадлежит пространству $L_{M_2}^*$, так как при всех $\lambda \geq 1$ функции $\frac{1}{\lambda} u(x)$ не принадлежат L_{M_2} . Действительно, пусть m — целое число, большее чем λ . Тогда в силу (13.3)

$$\begin{aligned} \int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\lambda}\right] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} M_2\left(\frac{nu_n}{\lambda}\right) \text{mes } G_n \geq \sum_{n=m}^{\infty} M_2(u_n) \text{mes } G_n \geq \\ &\geq \sum_{n=m}^{\infty} 2^n M_1(nu_n) \text{mes } G_n = \infty. \end{aligned}$$

Необходимость условия (13.1) доказана. Докажем достаточность этого условия.

Пусть выполнено условие (13.1). Пусть функция $u(x)$ принадлежит пространству $L_{M_1}^*$. Это значит, что при некотором $\mu > 0$ $\mu u(x) \in L_{M_1}$, т. е.

$$\int_G M_1[\mu u(x)] dx < \infty.$$

Обозначим через G_0 множество $G \left\{ |u(x)| < \frac{ku_0}{\mu} \right\}$. Тогда в силу (13.1)

$$\begin{aligned} \int_G M_2 \left[\frac{\mu u(x)}{k} \right] dx &= \int_{G_0} M_2 \left[\frac{\mu u(x)}{k} \right] dx + \int_{G \setminus G_0} M_2 \left[\frac{\mu u(x)}{k} \right] dx \leq \\ &\leq M_2(u_0) \text{mes } G_0 + \int_G M_1[\mu u(x)] dx < \infty. \end{aligned}$$

Значит, функция $\frac{\mu}{k} u(x) \in L_{M_2}$, откуда вытекает, что $u(x) \in L_{M_2}^*$.

Теорема доказана.

Напомним, что N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ называются эквивалентными ($M_1(u) \sim M_2(u)$), если $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$ и $M_2(u) \rightarrow M_1(u)$, т. е. если существуют такие положительные постоянные k_1 , k_2 и u_0 , что

$$M_1(k_1 u) \leq M_2(u) \leq M_1(k_2 u) \quad (u \geq u_0). \quad (13.4)$$

Из теоремы 13.1 непосредственно следует

Теорема 13.2. *Пространства $L_{M_1}^*$ и $L_{M_2}^*$ состоят из одних и тех же функций в том и только том случае, если N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ эквивалентны.*

Эта теорема является основанием для введения понятия эквивалентности N -функций.

2. Неравенство для норм.

Теорема 13.3. *Если $L_{M_1}^* \subset L_{M_2}^*$, то существует такая постоянная $q > 0$, что*

$$\|u\|_{M_2} \leq q \|u\|_{M_1} \quad (u(x) \in L_{M_1}^*). \quad (13.5)$$

Доказательство. В силу теорем 13.1 и 3.1 $L_{N_2}^* \subset L_{N_1}^*$, причем можно указать такие положительные числа k и v_0 , что

$$N_1 \left(\frac{v}{k} \right) \leq N_2(v) \quad (v \geq v_0).$$

Тогда при всех v

$$N_1\left(\frac{v}{k}\right) \leq N_1\left(\frac{v_0}{k}\right) + N_2(v). \quad (13.6)$$

Пусть теперь $v(x) \in L_{N_2}$ и $\rho(v; N_2) \leq 1$. Тогда в силу (13.6)

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{v}{k}; N_1\right) &= \int_G N_1\left[\frac{v(x)}{k}\right] dx \leq N_1\left(\frac{v_0}{k}\right) \text{mes } G + \int_G N_2[v(x)] dx \leq \\ &\leq N_1\left(\frac{v_0}{k}\right) \text{mes } G + 1 = a. \end{aligned}$$

Положим $q = ak$. Тогда в силу последнего неравенства и (1.17)

$$\rho\left(\frac{v}{q}; N_1\right) = \int_G N_1\left[\frac{v(x)}{ak}\right] dx \leq \frac{1}{a} \int_G N_1\left[\frac{v(x)}{k}\right] dx \leq 1.$$

Соотношение (13.5) следует из неравенств

$$\begin{aligned} \|u\|_{M_2} &= \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| = \\ &= q \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G u(x) \frac{v(x)}{q} dx \right| \leq \\ &\leq q \sup_{\rho(v; N_1) \leq 1} \left| \int_G u(x) w(x) dx \right| = q \|u\|_{M_1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что неравенство (13.5) выполняется с постоянной $q = 1$:

$$\|u\|_{M_2} \leq \|u\|_{M_1} \quad (u(x) \in L_{M_1}^*),$$

если при всех u выполняется неравенство

$$M_2(u) \leq M_1(u).$$

Из теоремы 13.3, в частности, следует, что нормы, порожденные эквивалентными N -функциями $M_1(u)$ и $M_2(u)$, эквивалентны:

$$q_1 \|u\|_{M_1} \leq \|u\|_{M_2} \leq q_2 \|u\|_{M_1}. \quad (13.7)$$

Поэтому при решении многих задач можно выбирать из класса эквивалентных N -функций ту, которая в силу каких-либо соображений более удобна.

Пусть $M_\alpha(u) = M(\alpha u)$ ($\alpha > 0$). Очевидно, $M_\alpha(u) \sim M(u)$. Имеет место равенство

$$\|u\|_{M_\alpha} = \alpha \|u\|_M, \quad (13.8)$$

для доказательства которого достаточно заметить, что $N_\alpha(v) = N\left(\frac{v}{\alpha}\right)$ и

$$\begin{aligned} \|u\|_{M_\alpha} &= \sup_{\rho(v; N_\alpha) \leq 1} \left| \int_G u(x)v(x) dx \right| = \sup_{\rho\left(\frac{v}{\alpha}; N\right) \leq 1} \left| \int_G u(x)v(x) dx \right| = \\ &= \alpha \sup_{\rho\left(\frac{v}{\alpha}; N\right) \leq 1} \left| \int_G u(x) \frac{v(x)}{\alpha} dx \right| = \alpha \|u\|_M. \end{aligned}$$

3. Об одном признаке сходимости по норме. Будем говорить, что N -функция $M_1(u)$ *растет существенно быстрее* N -функции $M(u)$, если при любом $\lambda > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(\lambda u)}{M_1(u)} = 0. \quad (13.9)$$

Например, функция $|u|^\alpha$ растет существенно быстрее функции $|u|^\beta$, если $\alpha > \beta$. Легко также видеть, что суперпозиция $M_1(u) = M[Q(u)]$ двух N -функций $M(u)$ и $Q(u)$ растет существенно быстрее, чем N -функция $M(u)$.

Нетрудно видеть, что $M_1(u)$ растет существенно быстрее, чем $M(u)$, тогда и только тогда, когда при каждом $\varepsilon > 0$

$$M(u) < M_1(\varepsilon u)$$

при больших значениях аргумента.

Лемма 13.1. *Если $M_1(u)$ растет существенно быстрее $M(u)$, то $N(v)$ растет существенно быстрее $N_1(v)$, где $N(v)$ и $N_1(v)$ — функции, дополнительные соответственно к функциям $M(u)$ и $M_1(u)$.*

Доказательство. Пусть заданы сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и произвольное μ . В силу (13.9) при больших значениях u выполняется неравенство

$$M\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \leq M_1\left(\frac{u}{\mu}\right).$$

В силу теоремы 2.1 и (2.5) для дополнительных функций при больших значениях v выполняется неравенство

$$N_1(\mu v) \leq N(\varepsilon v),$$

откуда в силу (1.17)

$$N_1(\mu v) \leq \varepsilon N(v).$$

Значит,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{N_1(\mu v)}{N(v)} = 0. \quad (13.10)$$

Лемма доказана.

Если $M_1(u)$ растет существенно быстрее, чем $M(u)$, то имеет место включение

$$L_{M_1}^* \subset E_M. \quad (13.11)$$

Так как E_M — максимальное линейное подмножество класса L_M , а $L_{M_1}^*$ — линейная оболочка класса L_{M_1} , то достаточно показать, что при любом λ функция $\lambda u(x)$ принадлежит L_M , если $u(x) \in L_{M_1}$. Последнее утверждение вытекает из того факта, что в силу (13.9) $M(\lambda u) \leq M_1(u)$ при больших значениях u .

Лемма 13.2. Пусть N -функция $M_1(u)$ растет существенно быстрее, чем N -функция $M(u)$. Пусть семейство функций \mathfrak{R} равномерно ограничено в пространстве $L_{M_1}^$: $\|u\|_{M_1} \leq a$ ($u(x) \in \mathfrak{R}$). Тогда семейство \mathfrak{R} имеет в L_M^* равностепенно абсолютно непрерывные нормы.*

Доказательство. Пусть задано сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Положим $\mu = \frac{2a}{\varepsilon}$. В силу (13.10) и теоремы Валле-Пуссена (см. стр. 112) функции $N_1[\mu v(x)]$, где $\rho(v; N) \leq 1$, имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, т. е. можно указать такое $\delta > 0$, что для всех функций $v(x) \in L_N$, удовлетворяющих условию $\rho(v; N) \leq 1$:

$$\int_{\mathcal{E}} N_1[\mu v(x)] dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

коль скоро $\text{mes } \mathcal{E} < \delta$ ($\mathcal{E} \subset G$).

Пусть $u(x) \in \mathfrak{N}$ и $v(x) \in L_N$, $\rho(v; N) \leq 1$. Тогда из неравенства Юнга следует, что при $\text{mes } \mathfrak{E} < \delta$

$$\left| \int_{\mathfrak{E}} u(x)v(x) dx \right| \leq \int_{\mathfrak{E}} M_1 \left[\frac{u(x)}{\mu} \right] dx + \int_{\mathfrak{E}} N_1 [\mu v(x)] dx \leq \\ \leq \left\| \frac{u}{\mu} \right\|_{M_1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

откуда вытекает, что для всех функций $u(x) \in \mathfrak{N}$

$$\|u(x; \mathfrak{E})\|_M = \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_{\mathfrak{E}} u(x)v(x) dx \right| \leq \varepsilon,$$

когда скоро $\text{mes } \mathfrak{E} < \delta(\mathfrak{E} \subset G)$.

Лемма доказана.

Имеет место и обратное утверждение.

Лемма 13.3. Пусть $M(u) \rightarrow M_1(u)$. Пусть каждое ограниченное в $L_{M_1}^*$ множество функций имеет равномерно абсолютно непрерывные нормы в L_M^* . Тогда N -функция $M_1(u)$ растет существенно быстрее, чем $M(u)$.

Доказательство. Допустим, что $M_1(u)$ не растет существенно быстрее, чем $M(u)$. Тогда в силу леммы 13.1 N -функция $N(v)$, дополнительная к функции $M(u)$, не растет существенно быстрее, чем дополнительная к $M_1(u)$ функция $N_1(v)$. Это значит, что найдутся такое $\varepsilon_0 > 0$ и такая последовательность чисел $v_n \rightarrow \infty$, что

$$N_1(v_n) > N(\varepsilon_0 v_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из этих неравенств вытекает, что для чисел $w_n = N_1(v_n)$ справедливы неравенства

$$N^{-1}(w_n) > \varepsilon_0 N_1^{-1}(w_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (13.12)$$

Через $G_n (n = 1, 2, \dots)$ будем обозначать такие подмножества G , для которых $\text{mes } G_n = \frac{1}{w_n}$. Пусть

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{w_n}{N_1^{-1}(w_n)}, & \text{если } x \in G_n, \\ 0, & \text{если } x \notin G_n. \end{cases}$$

Очевидно, $\|u_n\|_{M_1} = 1$. Так как $\text{mes } G_n \rightarrow 0$, то в силу условия леммы должно выполняться соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_M = 0.$$

Это противоречит вытекающему из (13.12) неравенству

$$\|u_n\|_M = \frac{w_n}{N_1^{-1}(w_n)} \|x(x, G_n)\|_M = \frac{N^{-1}(w_n)}{N_1^{-1}(w_n)} > \varepsilon_0.$$

Лемма доказана.

Теорема 13.4. Пусть N -функция $M_1(u)$ растет существенно быстрее, чем функция $M(u)$. Пусть последовательность $u_n(x) \in L_{M_1}$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится в среднем к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M_1[u_n(x)] dx = 0. \quad (13.13)$$

Тогда эта последовательность сходится к нулю по норме пространства L_M^* :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_M = 0.$$

Доказательство. Из условия (13.13) следует, что нормы $\|u_n\|_{M_1}$ ($n = 1, 2, \dots$) равномерно ограничены. В силу леммы (13.2) последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) имеет в L_M^* равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Так как в силу того же условия (13.13) последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится к нулю по мере, то в силу леммы 11.2 она сходится к нулю по норме L_M^* .

Теорема доказана.

4. Произведение функций из пространств Орлича. Пусть $u(x) \in L_{M_1}^*$, $w(x) \in L_{\Phi}^*$. Произведение $u(x)w(x)$, вообще говоря, не является даже суммируемой функцией. Однако если N -функции $M_1(u)$ и $\Phi(u)$ определенным образом связаны друг с другом, то произведение $u(x)w(x)$ может оказаться не только суммируемым, но и принадлежащим некоторому третьему пространству Орлича $L_{M_2}^*$, где $M_2(u)$ определяется по функциям $M_1(u)$ и $\Phi(u)$. В настоящем пункте исследуется ряд возникающих в связи с этим вопросов.

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда $L_{M_1}^* = L^{\alpha_1}$, $L_{\Phi}^* = L^{\alpha_2}$. Для того чтобы произведение $u(x)\omega(x)$ функций $u(x) \in L^{\alpha_1}$ и $\omega(x) \in L^{\alpha_2}$ было суммируемой функцией, очевидно, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \leq 1.$$

При этом $u(x)\omega(x)$ принадлежит всем L^γ , где $1 \leq \gamma \leq \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Проверку этих очевидных фактов предоставляем читателю.

Перейдем к общему случаю.

Лемма 13.4. Пусть $u(x)$ — некоторая функция. Пусть $u(x)\omega(x) \in E$ для всех функций $\omega(x) \in L_{\Phi}^$, где E — некоторое пространство Орлича $L_{M_2}^*$ или пространство L суммируемых функций.*

Тогда существует такая постоянная $k > 0$, что

$$\|u\omega\|_E \leq k\|\omega\|_{\Phi}.$$

Доказательство. Формула

$$A\omega(x) = u(x)\omega(x) \quad (\omega(x) \in L_{\Phi}^*)$$

определяет аддитивный и однородный оператор, действующий из L_{Φ}^* в E . Покажем, что этот оператор замкнут*). Пусть, действительно, $\|\omega_n - \omega_0\|_{\Phi} \rightarrow 0$ и $\|u\omega_n - v\|_E \rightarrow 0$. Тогда функции $\omega_n(x)$ по мере сходятся к $\omega_0(x)$, в силу чего функции $u(x)\omega_n(x)$ сходятся по мере к $u(x)\omega_0(x)$. С другой стороны, функции $u(x)\omega_n(x)$ сходятся по мере к $v(x)$. Отсюда и следует, что почти всюду $v(x) = u(x)\omega_0(x)$. Так как замкнутый оператор A определен на всем банаховом пространстве L_{Φ}^* , то он непрерывен**).

Лемма доказана.

*) Напомним, что оператор A называется *замкнутым*, если из $\|\omega_n - \omega_0\|_{\Phi} \rightarrow 0$ и $\|A\omega_n - v\|_E \rightarrow 0$ следует, что $v = A\omega_0$.

***) Каждый замкнутый аддитивный и однородный оператор A , определенный на полном метрическом пространстве, непрерывен (см., например, [59], стр. 47).

Лемма 13.5. Пусть $u(x)w(x) \in E$ для всех функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $w(x) \in L_\Phi^*$, где E — некоторое пространство Орлича $L_{M_2}^*$, или пространство L . Тогда существует такая постоянная $k > 0$, что

$$\|uw\|_E \leq k \|u\|_{M_1} \|w\|_\Phi. \quad (13.14)$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей леммы, рассмотрим линейные операторы

$$A_u w(x) = u(x)w(x) \quad (w(x) \in L_\Phi^*),$$

определенные функциями $u(x) \in L_{M_1}^*$, $\|u\|_{M_1} \leq 1$. Значения этих операторов на каждом фиксированном элементе $w(x) \in L_\Phi^*$ ограничены, так как в силу леммы 13.4 ограничен линейный оператор $Bu(x) = u(x)w(x)$, действующий из $L_{M_1}^*$ в E .

По известной теореме (см., например, [3], стр. 68) нормы операторов A_u ограничены в совокупности. Пусть $\|A_u\| \leq k$. Тогда для любых функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $w(x) \in L_\Phi^*$

$$\begin{aligned} \|uw\|_E &= \left\| \frac{u}{\|u\|_{M_1}} w \right\|_E \|u\|_{M_1} = \left\| A_{\frac{u}{\|u\|_{M_1}}} w \right\|_E \|u\|_{M_1} \leq \\ &\leq k \|u\|_{M_1} \|w\|_\Phi. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, вытекает следующее утверждение: если произведение $u(x)v(x)w(x)$ суммируемо для любой тройки функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{M_2}^*$, $w(x) \in L_{M_3}^*$, то имеет место неравенство

$$\int_G u(x)v(x)w(x) dx \leq k \|u\|_{M_1} \|v\|_{M_2} \|w\|_{M_3}.$$

Это неравенство является обобщением известного неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} &\int_G u(x)v(x)w(x) dx \leq \\ &\leq k \left(\int_G |u(x)|^{a_1} dx \right)^{\frac{1}{a_1}} \left(\int_G |v(x)|^{a_2} dx \right)^{\frac{1}{a_2}} \left(\int_G |w(x)|^{a_3} dx \right)^{\frac{1}{a_3}}, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leq 1$.

Это утверждение справедливо для любого конечного числа сомножителей.

Легко видеть, что произведение $u(x)\omega(x)$ будет суммируемым для любых функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $\omega(x) \in L_\Phi^*$ лишь в том случае, когда $\Psi(u) \rightarrow M_1(u)$ или, что то же, $N_1(u) \rightarrow \Phi(u)$. Здесь, как обычно, через $\Psi(u)$, $N_1(u)$ обозначены N -функции, дополнительные к $\Phi(u)$ и $M_1(u)$. Отметим, что нельзя указать такое пространство Орлича, которому принадлежат все произведения $u(x)\omega(x)$, если $\Phi(u) = N_1(u)$. Это вытекает из следующей теоремы:

Теорема 13.5. Пусть $u(x)\omega(x)$ принадлежит некоторому пространству Орлича $L_{M_2}^*$ для любой пары функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $\omega(x) \in L_\Phi^*$. Тогда N -функция $M_1(u)$ растет существенно быстрее, чем $\Psi(u)$, или, что то же, $\Phi(u)$ растет существенно быстрее, чем $N_1(u)$.

Доказательство. В силу леммы 13.3 достаточно показать, что каждое ограниченное в $L_{M_1}^*$ множество функций имеет равномерно абсолютно непрерывные нормы в пространстве L_Ψ^* .

Пусть T — шар радиуса r в пространстве $L_{M_1}^*$. В силу леммы 13.5

$$\|u\omega\|_{M_2} \leq 2rk \quad (u(x) \in T, \rho(\omega; \Phi) \leq 1).$$

Из теоремы Валле-Пуссена тогда вытекает, что функции $u(x)\omega(x)$ имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы, т. е. каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что $\left| \int_{G_1} u(x)\omega(x) dx \right| < \varepsilon$ для каждого $G_1 \subset G$, мера которого меньше δ . Последнее неравенство означает, что из $\text{mes } G_1 < \delta$ следует

$$\|u(x)\omega(x; G_1)\|_\Psi = \sup_{\rho(\omega; \Phi) \leq 1} \left| \int_{G_1} u(x)\omega(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 13.6. Если для каждой пары функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $\omega(x) \in L_\Phi^*$ произведение $u(x)\omega(x)$ принадлежит некоторому пространству Орлича $L_{M_2}^*$, то N -функции $M_1(u)$ и $\Phi(u)$ растут существенно быстрее N -функции $M_2(u)$.

Доказательство. Докажем утверждение теоремы, например, для функции $M_1(u)$. Пусть $G_1 \subset G$ и $\chi(x; G_1)$ — характеристическая функция множества G_1 . Так как $\chi(x; G_1) \in L_\Phi^*$, то $u(x)\chi(x; G_1) \in L_{M_2}^*$ и в силу леммы 13.5

$$\|u(x)\chi(x; G_1)\|_{M_2} \leq k \|u\|_{M_1} \|\chi\|_\Phi.$$

Пусть семейство функций $u(x) \in L_{M_1}^*$ имеет ограниченные нормы $\|u\|_{M_1} \leq a$. Тогда в силу предыдущего неравенства и формулы (9.11)

$$\|u(x)\chi(x; G_1)\|_{M_2} \leq ak \operatorname{mes} G_1 \Psi^{-1} \left(\frac{1}{\operatorname{mes} G_1} \right),$$

откуда следует, что

$$\lim_{\operatorname{mes} G_1 \rightarrow 0} \|u\chi\|_{M_2} = 0,$$

т. е. что функции $u(x)$ имеют в $L_{M_2}^*$ равностепенно абсолютно непрерывные нормы.

Теорема доказана.

Б. Достаточные условия. Укажем теперь некоторые достаточные условия того, что произведения двух функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $\omega(x) \in L_\Phi^*$ принадлежат некоторому пространству Орлича $L_{M_2}^*$.

Теорема 13.7. Пусть существуют такие две взаимно дополнительные N -функции $R(u)$ и $Q(u)$, что при $u \geq u_0$ выполняются неравенства

$$R(u) < M_2^{-1} [M_1(\alpha u)] \quad (13.15)$$

и

$$Q(u) < M_2^{-1} [\Phi(\beta u)], \quad (13.16)$$

где α, β — некоторые постоянные. Тогда для каждой пары функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $\omega(x) \in L_\Phi^*$ произведение $u(x)\omega(x)$ принадлежит $L_{M_2}^*$.

Доказательство. В силу (13.15) и (13.16) при всех значениях аргумента выполняются неравенства

$$M_2 [R(u)] < M_2 [R(u_0)] + M_1(\alpha u), \quad (13.17)$$

$$M_2 [Q(u)] < M_2 [Q(u_0)] + \Phi(\beta u). \quad (13.18)$$

Пусть $v(x) \in L_{N_2}$. Тогда

$$\int_G u(x) w(x) v(x) dx = \\ = \alpha\beta \|u\|_{M_1} \|w\|_{\Phi} \int_G \frac{u(x)}{\alpha \|u\|_{M_1}} \frac{w(x)}{\beta \|w\|_{\Phi}} v(x) dx.$$

Применяя дважды к последнему интегралу неравенство Юнга, получим:

$$\left| \int_G u(x) w(x) v(x) dx \right| \leq \\ \leq \alpha\beta \|u\|_{M_1} \|w\|_{\Phi} \left\{ \int_G M_2 \left[R \left(\frac{u(x)}{\alpha \|u\|_{M_1}} \right) \right] dx + \right. \\ \left. + \int_G M_2 \left[Q \left(\frac{w(x)}{\beta \|w\|_{\Phi}} \right) \right] dx + 2 \int_G N_2[v(x)] dx \right\},$$

и в силу (13.17) и (13.18)

$$\left| \int_G u(x) w(x) v(x) dx \right| \leq \alpha\beta \|u\|_{M_1} \|w\|_{\Phi} \left\{ M_2 [R(u_0)] \text{mes} G + \right. \\ \left. + M_2 [Q(u_0)] \text{mes} G + \int_G M_1 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] dx + \right. \\ \left. + \int_G \Phi \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx + 2 \int_G N_2[v(x)] dx \right\} < \infty.$$

Таким образом, $u(x)w(x) \in L_{M_2}^*$, причем

$$\|u w\|_{M_2} = \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G u(x) w(x) v(x) dx \right| \leq k \|u\|_{M_1} \|w\|_{\Phi}, \quad (13.19)$$

где

$$k = \alpha\beta (4 + \{M_2 [R(u_0)] + M_2 [Q(u_0)]\} \text{mes} G).$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, вытекает приведенное выше утверждение, что при условии $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \leq 1$ произведение $u(x)w(x)$ принадлежит всем L^γ , где $1 \leq \gamma \leq \gamma_0 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. В самом деле, если $M_1(u) = |u|^{\alpha_1}$, $\Phi(u) = |u|^{\alpha_2}$,

$M_2(u) = |u|^{\gamma_0}$, то N -функции $R(u) = M_2^{-1}[M_1(u)] = |u|^{\frac{\alpha_1}{\gamma_0}}$ и $Q(u) = M_2^{-1}[\Phi(u)] = |u|^{\frac{\alpha_2}{\gamma_0}}$ будут взаимно дополнительными, так как $\frac{\gamma_0}{\alpha_1} + \frac{\gamma_0}{\alpha_2} = 1$.

Нас будет в дальнейшем интересовать случай, когда N -функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию, а $M_2(u) = N_1(u)$. Как легко видеть, в этом случае утверждение теоремы 13.7 выполняется, если при больших значениях u справедливо неравенство

$$N_1[N_1(u)] < \Phi(\beta u). \quad (13.20)$$

Действительно, в силу теоремы 6.3 при больших значениях u

$$N_1[M_1(u)] < M_1(ku),$$

т. е.

$$M_1(u) < N_1^{-1}[M_1(ku)].$$

Положив $M_1(u) = R(u)$, $N_1(u) = Q(u)$, убеждаемся, что выполнены условия теоремы 13.7.

Также легко видеть, что в случае, когда N -функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, а N -функция $M_2(u)$ — Δ_2 -условию, то утверждение теоремы 13.7 справедливо, если при больших значениях аргумента выполняется неравенство

$$M_2[N_1(u)] < \Phi(\beta u). \quad (13.21)$$

Для доказательства нужно положить $R(u) = M_1(u)$, $Q(u) = N_1(u)$ и заметить, что N -функция, удовлетворяющая Δ_2 -условию, растет медленнее некоторой степенной функции.

Если N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, то можно указать еще следующее достаточное условие.

Теорема 13.8. Пусть N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ' -условию. Пусть при $u \geq u_0$ выполняются неравенства

$$R(\alpha u) < M_1[M_2^{-1}(u)], \quad (13.22)$$

$$Q(\beta u) < \Phi[M_2^{-1}(u)], \quad (13.23)$$

где $R(u)$ и $Q(u)$ — взаимно дополнительные N -функции, α, β — постоянные. Тогда для каждой пары функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $\omega(x) \in L_{\Phi}^*$ произведение $u(x)\omega(x)$ принадлежит $L_{M_2}^*$.

Доказательство. В силу (13.22) и (13.23) при всех значениях u выполняются неравенства

$$R[\alpha M_2(u)] < R(\alpha u_0) + M_1(u), \quad (13.24)$$

$$Q[\beta M_2(u)] < Q(\beta u_0) + \Phi(u). \quad (13.25)$$

Так как N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, то существуют такие постоянные a , a_1 , b_1 и C , что при всех u , w

$$M_2(uw) \leq a + a_1 M_2(u) + b_1 M_2(w) + C M_2(u) M_2(w). \quad (13.26)$$

Пусть $v(x) \in L_{N_2}$. Тогда

$$\int_G u(x) w(x) v(x) dx = \|u\|_{M_1} \|w\|_{\Phi} \int_G \frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} v(x) dx.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство Юнга, получим:

$$\left| \int_G u(x) w(x) v(x) dx \right| \leq \|u\|_{M_1} \|w\|_{\Phi} \left\{ \int_G M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx + \int_G N_2[v(x)] dx \right\}.$$

В силу (13.26)

$$\begin{aligned} \int_G M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx &\leq a \operatorname{mes} G + a_1 \int_G M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] dx + \\ &+ b_1 \int_G M_2 \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx + C \int_G M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] M_2 \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx. \end{aligned}$$

Из неравенств (13.22) и (13.23) следует, что при всех u

$$M_2(u) < \alpha_1 + \frac{1}{\alpha} M_1(u)$$

и

$$M_2(u) < \beta_1 + \frac{1}{\beta} \Phi(u),$$

где α_1, β_1 — некоторые постоянные. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_G M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}, \frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx &\leq a \operatorname{mes} G + \alpha_1 a_1 \operatorname{mes} G + \\ &+ \frac{a_1}{\alpha} \int_G M_1 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] dx + \beta_1 b_1 \operatorname{mes} G + \frac{b_1}{\beta} \int_G \Phi \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx + \\ &+ C \int_G M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] M_2 \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx \leq (a + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1) \operatorname{mes} G + \\ &+ \frac{a_1}{\alpha} + \frac{b_1}{\beta} + C \int_G M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] M_2 \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx. \end{aligned}$$

В силу неравенства Юнга и неравенств (13.24) и (13.25)

$$\begin{aligned} \int_G M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] M_2 \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx &\leq \frac{1}{\alpha\beta} \left\{ \int_G R \left(\alpha M_2 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] \right) dx + \right. \\ &+ \left. \int_G Q \left(\beta M_2 \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] \right) dx \right\} \leq \frac{1}{\alpha\beta} \left\{ [R(\alpha u_0) + Q(\beta u_0)] \operatorname{mes} G + \right. \\ &+ \left. \int_G M_1 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}} \right] dx + \int_G \Phi \left[\frac{w(x)}{\|w\|_{\Phi}} \right] dx \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha\beta} \{ 2 + [R(\alpha u_0) + Q(\beta u_0)] \operatorname{mes} G \}. \end{aligned}$$

Объединяя все полученные оценки, убеждаемся, что для всех $v(x) \in L_{N_2}$

$$\int_G u(x) w(x) v(x) dx < \infty,$$

причем

$$\|uw\|_{M_2} = \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G u(x) w(x) v(x) dx \right| \leq k \|u\|_{M_1} \|w\|_{\Phi}, \quad (13.27)$$

где

$$k = \left\{ 1 + \frac{2C}{\alpha\beta} + \left[a + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 + CR(\alpha u_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + CQ(\beta u_0) \right] \operatorname{mes} G + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{b_1}{\beta} \right\}.$$

Теорема доказана.

§ 14. Линейные функционалы

1. Линейные функционалы в L_M^* . Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — дополнительные друг к другу N -функции. Пусть $v(x)$ — некоторая фиксированная функция из L_M^* . Из неравенства Гёльдера (9.16) вытекает, что на всем пространстве L_M^* определен линейный функционал

$$I(u) = (u, v) = \int_G u(x) v(x) dx \quad (u(x) \in L_M^*) \quad (14.1)$$

Имеет место неравенство

$$\|I\| \leq \|v\|_N \leq 2\|I\|, \quad (14.2)$$

где через $\|I\|$ обозначена норма функционала $I(u)$:

$$\|I\| = \sup_{\|u\|_M \leq 1} |I(u)|.$$

Левое неравенство (14.2) следует из неравенства Гёльдера:

$$|I(u)| = |(u, v)| \leq \|u\|_M \|v\|_N.$$

Правое неравенство (14.2) вытекает из (9.12):

$$\|v\|_N = \sup_{\rho(u; M) < 1} |(u, v)| \leq \sup_{\|u\|_M \leq 2} |(u, v)| = 2\|I\|.$$

Введем обозначение: $k(v) = \frac{\|v\|_N}{\|I\|}$. Тогда неравенство (14.2) может быть переписано в виде

$$1 \leq k(v) \leq 2.$$

Функция $k(v)$ была детально изучена Д. В. Салеховым. Ниже приводятся простейшие свойства этой функции.

В качестве примера вычислим значение функции $k(v)$ для пространств Орлича, определенных N -функциями $M(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > 1$), т. е. для случая пространств L^α .

Напомним, что для каждой функции $u(x) \in L_M$

$$\|u\|_M = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \left\{ \int_G M[u(x)] dx \right\}^{\frac{1}{\alpha}},$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|I\| &= \sup_{\|u\|_M \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| = \\ &= \sup_{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \left\{ \int_G M[u(x)] dx \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| = \\ &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}}} \sup_{\int_G M[u(x)] dx \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| = \frac{\|v\|_N}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}}}, \end{aligned}$$

откуда

$$k(v) = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}} (v(x) \in L_N^*).$$

Постоянная $\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \right)$ может принимать любые значения из полуинтервала (1, 2].

Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — произвольные дополнительные друг к другу N -функции. Пусть G_1 — некоторое подмножество G . Положим $v(x) = N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G_1} \right) \chi(x; G_1)$, где $\chi(x; G_1)$ — характеристическая функция множества G_1 . Покажем, что

$$k(v) = \text{mes } G_1 M^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G_1} \right) N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G_1} \right). \quad (14.3)$$

Из формулы для нормы характеристической функции вытекает, что $\|v\|_N$ равна числу, стоящему в правой части формулы (14.3). Поэтому достаточно показать, что норма линейного функционала (14.1), определенного функцией $v(x)$, равна единице.

Так как $\rho(v; N) = 1$, то

$$\|I\| = \sup_{\|u\|_M \leq 1} |(u, v)| \leq \sup_{\|u\|_M \leq 1} \left\{ \sup_{\rho(w; N) \leq 1} |(u, w)| \right\} = 1.$$

С другой стороны,

$$\|I\| = \sup_{\|u\|_M \leq 1} |(u, v)| \geq \left(\frac{\chi(x; G_1)}{\|\chi(x; G_1)\|_M}, v \right) = 1.$$

Значит, $\|I\| = 1$, и формула (14.3) доказана.

Таким образом, множество значений функции $k(v)$ по меньшей мере содержит множество значений функции

$$f(\gamma) = \frac{M^{-1}(\gamma) N^{-1}(\gamma)}{\gamma} \quad \left(\frac{1}{\text{mes } G} < \gamma < \infty \right).$$

Д. В. Салехов показал, что $f(\gamma) = \text{const}$ лишь в том случае, когда $M(u) = k|u|^\alpha$ ($\alpha > 1$). Этот результат означает, что функция $k(v)$ постоянна лишь в случае пространств L^α .

Докажем это утверждение для наиболее простого случая, когда

$$f(\gamma) \equiv 2 \quad \left(\gamma \geq \frac{1}{\text{mes } G} \right).$$

Прежде всего отметим, что из равенства $f(\gamma) \equiv c$ вытекает непрерывность правых производных $p(u)$ и $q(u)$ N -функций $M(u)$ и $N(u)$. Действительно, из равенства

$$M^{-1}(\gamma) N^{-1}(\gamma) = c\gamma \quad \left(\frac{1}{\text{mes } G} \leq \gamma < \infty \right)$$

вытекает, что

$$\frac{M^{-1}(\gamma)}{q[N^{-1}(\gamma)]} + \frac{N^{-1}(\gamma)}{p[M^{-1}(\gamma)]} = c.$$

Так как производные $q(u)$ и $p(u)$ в точках разрыва имеют положительные скачки, то из последнего равенства следует, что $q(u)$ и $p(u)$ непрерывны.

Пусть теперь $f(\gamma) \equiv 2$, т. е. $M^{-1}(\gamma) N^{-1}(\gamma) = 2\gamma$. В силу неравенства Юнга всегда

$$M^{-1}(\gamma) N^{-1}(\gamma) \leq 2\gamma.$$

Поэтому мы имеем случай, когда в неравенстве Юнга достигается знак равенства. В силу непрерывности производных $p(u)$ и $q(u)$ знак равенства достигается, если $M^{-1}(\gamma) = q[N^{-1}(\gamma)]$ или, что то же, $N^{-1}(\gamma) = p[M^{-1}(\gamma)]$.

Используя последнее равенство и соотношение $M^{-1}(\gamma) N^{-1}(\gamma) = 2\gamma$, получим, что для всех $\gamma \geq \frac{1}{\text{mes } G}$

$$\frac{2\gamma}{M^{-1}(\gamma) p[M^{-1}(\gamma)]} = 1.$$

Положим $M^{-1}(\gamma) = u$. Тогда при $u \geq u_0 = M^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } G}\right)$

$$\frac{p(u)}{M(u)} = \frac{2}{u}.$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от u_0 до $|u|$, получим:

$$M(u) = \frac{M(u_0)}{u_0^2} |u|^2 \quad (u \geq u_0).$$

Из (14.2) следует, что пространство L_N^* можно рассматривать как линейное подмножество сопряженного к L_M^* пространства функционалов. Норма пространства L_N^* при этом эквивалентна норме, индуцированной на L_N^* как подмножестве пространства функционалов. Так как пространство L_N^* полно по норме Орлича, то оно в пространстве функционалов образует замкнутое подпространство. L_N^* , вообще говоря, не совпадает с пространством функционалов на L_M^* , так как имеет место следующая теорема.

Теорема 14.1 Пусть N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию.

Тогда (14.1) не является общим видом линейного функционала на L_M^* .

Доказательство. Пусть E_M — линейное подпространство L_M^* , являющееся замыканием в L_M^* множества ограниченных функций. В силу теоремы 9.4 и (10.1) E_M является правильной частью L_M^* . Пусть $u_0(x) \in L_M^* \setminus E_M$. Определим на L_M^* линейный функционал $l(u)$, положив $l(u_0) = 1$ и $l(u) = 0$ при $u(x) \in E_M$, а затем продолжив его по теореме Гана — Банаха [3] с сохранением нормы на все L_M^* .

Допустим, что этот функционал $l(u)$ представим в виде

$$l(u) = \int_G u(x) v(x) dx \quad (u(x) \in L_M^*),$$

где $v(x)$ — некоторая функция. Образует последовательность ограниченных функций

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x) & \text{при } |v(x)| \leq n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{при } |v(x)| > n. \end{cases}$$

По построению функционала $l(u)$

$$\int_G v_n(x) v(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда следует, что функция $v(x)$ почти всюду равна нулю. Но тогда и $l(u_0) = 0$, что противоречит тому, что $l(u_0) = 1$.

Теорема доказана.

2. Общий вид линейного функционала на E_M .

Теорема 14.2. Формула (14.1), где $v(x) \in L_N^*$, дает общий вид линейного функционала на E_M .

Доказательство этой теоремы проведем, пользуясь обычным для подобных теорем рассуждением.

Пусть $l(u)$ — линейный функционал, определенный на E_M . Определим на совокупности всех измеримых подмножеств \mathcal{E} множества G функцию множества $F(\mathcal{E})$ равенством

$$F(\mathcal{E}) = l[x(x; \mathcal{E})],$$

где $x(x; \mathcal{E})$ — характеристическая функция множества \mathcal{E} .

Аддитивная функция $F(\mathcal{E})$ является абсолютно непрерывной функцией, так как в силу (9.11)

$$|F(\mathcal{E})| = |l[x(x; \mathcal{E})]| \leq \|l\| \text{mes } \mathcal{E} N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \right),$$

откуда

$$\lim_{\text{mes } \mathcal{E} \rightarrow 0} |F(\mathcal{E})| = 0.$$

В силу теоремы Радона—Никодима [59] функция $F(\mathcal{E})$ представима в виде

$$F(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} v(x) dx, \quad (14.4)$$

где $v(x)$ — суммируемая на G функция.

Из (14.4) следует, что для каждой измеримой функции $u(x)$, принимающей конечное число значений, также справедливо равенство

$$l(u) = \int_G u(x) v(x) dx. \quad (14.5)$$

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из L_M^1 . Можно указать такую сходящуюся почти всюду к $u(x)$ последователь-

ность конечнозначных функций $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), что $|u_n(x)| \leq |u(x)|$ почти всюду, так что $\|u_n\|_M \leq \|u\|_M$. Последовательность положительных функций $|u_n(x)v(x)|$ также почти всюду сходится к функции $|u(x)v(x)|$. В силу теоремы. Фату и (16.5)

$$\left| \int_G u(x)v(x) dx \right| \leq \sup_n \left\{ \int_G |u_n(x)v(x)| dx \right\} = \\ = \sup_n |l(|u_n(x)| \operatorname{sign} v(x))| \leq \|l\| \sup_n \|u_n\|_M \leq \|l\| \|u\|_M < \infty$$

Значит, $v(x) \in L_N^*$.

Обозначим через $l_1(u)$ функционал

$$l_1(u) = \int_G u(x)v(x) dx,$$

определенный на L_M^* . В силу (14.5) непрерывные линейные функционалы $l(u)$ и $l_1(u)$ принимают одинаковые значения на всюду плотном в E_M множестве конечнозначных функций. Значит, они принимают одинаковые значения на всем E_M , т. е. формула (14.5) справедлива для всех функций $u(x) \in E_M$.

Различные функции $v(x) \in L_N^*$, очевидно, порождают на E_M различные функционалы.

Теорема доказана.

Норму функционала (14.1), рассматриваемого только на E_M , обозначим временно через $\|l\|_1$. По каждому $\varepsilon > 0$ найдется функция $u(x) \in L_M^*$, $\|u\|_M = 1$, такая, что

$$\int_G u(x)v(x) dx \geq \|l\| - \varepsilon.$$

Положим

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } |u(x)| \leq n, \\ 0 & \text{при } |u(x)| > n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, $\|u_n\|_M \leq \|u\|_M$ и $u_n(x) \in E_M$. Из абсолютной непрерывности интеграла следует, что при достаточно большом n

$$\int_G u_n(x)v(x) dx \geq \int_G u(x)v(x) dx - \varepsilon,$$

откуда вытекает

$$\|I\|_1 \geq \|u_n\|_M \|I\|_1 \geq \int_G u_n(x) v(x) dx \geq \|I\| - 2\varepsilon.$$

Из полученного неравенства и очевидного соотношения $\|I\|_1 \leq \|I\|$ вытекает, что $\|I\|_1 = \|I\|$, т. е.

$$\|I\| = \sup_{\substack{\|u\|_M \leq 1, \\ u \in E_M}} |I(u)|. \quad (14.6)$$

Полученное равенство позволяет пользоваться одним и тем же обозначением $\|I\|$ и тогда, когда функционал (14.1) рассматривается на всем L_M^* , и тогда, когда он рассматривается только на E_M .

Если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то E_M совпадает с $L_M^* = L_M$. В этом случае формула (14.1) дает общий вид линейного функционала на L_M^* .

3. E_N -слабая сходимость. Будем говорить, что последовательность $u_n(x) \in L_M^*$ ($n = 1, 2, \dots$) *E_N -слабо сходится*, если последовательность чисел

$$I(u_n) = \int_G u_n(x) v(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходится для каждой функции $v(x) \in E_N$.

Приведенное определение отличается от обычного, так как функции $v(x) \in E_N$ не определяют, вообще говоря, всех линейных функционалов на L_M^* . Это определение совпадает с обычным, если обе N -функции $M(u)$ и $N(v)$ удовлетворяют Δ_2 -условию.

Если рассматривать слабую сходимость в пространстве E_N , то приведенное определение совпадает с обычным, если N -функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

В общем случае E_N -слабая сходимость — это слабая сходимость в пространстве L_M^* , рассматриваемом как пространство функционалов на E_N . Действительно, как уже было показано, между элементами этого пространства функционалов и элементами L_M^* существует линейное взаимно однозначное соответствие, при котором нормы соответствующих элементов эквивалентны. Таким образом, каждой E_N -слабо сходя-

щейся последовательности элементов в L_M^* соответствует слабо сходящаяся последовательность линейных функционалов на E_N .

Из общих теорем (см., например, [35], стр. 193—196) вытекают следующие утверждения.

Теорема 14.3. *Если последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ ($n = 1, 2, \dots$) E_N -слабо сходится, то нормы $\|u_n\|_M$ ($n = 1, 2, \dots$) ограничены в совокупности.*

Теорема 14.4 *Каждое пространство L_M^* E_N -слабо полно в том смысле, что для каждой E_N -слабо сходящейся последовательности функций $u_n(x) \in L_M^*$ ($n = 1, 2, \dots$) можно указать такую единственную функцию $u(x) \in L_M^*$, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G u_n(x) v(x) dx = \int_G u(x) v(x) dx \quad (v(x) \in E_N).$$

Каждое пространство L_M^ E_N -слабо компактно, т. е. из каждой ограниченной последовательности можно выделить E_N -слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Отметим, что E_N -слабым замыканием пространства E_M в пространстве L_M^* является все пространство L_M^* . Это следует из того, что для каждой функции $u(x) \in L_M^*$ последовательность ограниченных функций

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } |u(x)| \leq n, \\ 0 & \text{при } |u(x)| > n \end{cases}$$

сходится E_N -слабо к $u(x)$, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G [u(x) - u_n(x)] v(x) dx = 0$$

для всех $v(x) \in E_N$ (даже для всех $v(x) \in L_N^*$).

Как было показано (см. стр. 109), нормы функций $u_n(x)$ также сходятся к $\|u\|_M$. Таким образом, последовательность $u_n(x)$ почти везде сходится к $u(x)$, E_N -слабо сходится к $u(x)$ и $\|u_n\|_M \rightarrow \|u\|_M$. Однако, вообще говоря, $u_n(x)$ не сходятся по норме к $u(x)$.

Каждая сходящаяся по норме L_M^* последовательность функций, очевидно, E_N -слабо сходится. Обратное, конечно, места не имеет. В дальнейшем будет использовано следующее очевидное утверждение.

Теорема 14.5. Если последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ ($n = 1, 2, \dots$) E_N -слабо сходится и компактна в смысле сходимости по норме L_M^* , то она сходится и по норме.

Иногда бывает удобен следующий признак E_N -слабой сходимости.

Теорема 14.6. Пусть последовательность $u_n(x) \in L_M^*$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится по мере к функции $u(x)$, причем нормы $\|u_n\|_M$ ($n = 1, 2, \dots$) ограничены в совокупности.

Тогда $u(x) \in L_M^*$ и последовательность $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) E_N -слабо сходится к $u(x)$.

Доказательство. В силу E_N -слабой компактности шара в L_M^* каждая ограниченная по норме последовательность функций из L_M^* содержит E_N -слабо сходящуюся подпоследовательность. Поэтому в нашем случае достаточно показать для любой подпоследовательности $u_{n_k}(x)$, E_N -слабо сходящейся в L_M^* к $u_0(x) \in L_M^*$, что $u_0(x) = u(x)$.

Обозначим через $\chi_m(x)$ характеристическую функцию некоторого фиксированного множества точек, на которых

$$|u(x) - u_0(x)| \leq m,$$

а через $v_0(x)$ — функцию $\text{sign}[u(x) - u_0(x)]$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как функции $u_0(x)$, $u_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) в силу теоремы Валле-Пуссена (см. стр. 113) имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то можно указать такое $\delta > 0$, что при $\text{mes } \mathcal{E} < \delta$ ($\mathcal{E} \subset G$)

$$\int_{\mathcal{E}} |u_0(x)| dx < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \int_{\mathcal{E}} |u_{n_k}(x)| dx < \frac{\varepsilon}{5} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Будем считать, что $\delta < \frac{\varepsilon}{5m}$. Из сходимости подпоследовательности $u_{n_k}(x)$ по мере к функции $u(x)$ и E_N -слабой сходимости этой последовательности к функции $u_0(x)$ вытекает существование такого k_0 , что при $k > k_0$

$$\int_G [u_{n_k}(x) - u_0(x)] v_0(x) \chi_m(x) dx < \frac{\varepsilon}{5}$$

и $\text{mes } G_k < \delta$, где $G_k = G \left(|u_{n_k}(x) - u(x)| \geq \frac{\varepsilon}{5 \text{mes } G} \right)$.

Тогда при $k > k_0$

$$\begin{aligned} \int_G |u(x) - u_0(x)| x_m(x) dx &\leq \\ &\leq \left| \int_G [u_{n_k}(x) - u_0(x)] v_0(x) x_m(x) dx \right| + \\ + \int_{G \setminus G_k} |u(x) - u_{n_k}(x)| dx + \int_{G_k} |u_{n_k}(x)| dx + \int_{G_k} |u_0(x)| dx + \\ &+ \int_{G_k} |u(x) - u_0(x)| x_m(x) dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5 \operatorname{mes} G} \operatorname{mes}(G \setminus G_k) + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + m \operatorname{mes} G_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как ε произвольно, то

$$\int_G |u(x) - u_0(x)| x_m(x) dx = 0,$$

т. е. $u_0(x) = u(x)$ почти всюду.

Теорема доказана.

4. E_N -слабо непрерывные линейные функционалы. Будем говорить, что линейный функционал $l(u)$ E_N -слабо непрерывен на L_M^* , если для каждой E_N -слабо сходящейся к элементу $u_0(x) \in L_M^*$ последовательности $u_n(x) \in L_M^*$ ($n = 1, 2, \dots$) имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(u_n) = l(u_0).$$

Из определения вытекает, что функционалы вида (14.1), где $v(x) \in E_N$ являются E_N -слабо непрерывными. Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 14.7. *Каждый E_N -слабо непрерывный на L_M^* линейный функционал представим в виде (14.1), где $v(x) \in E_N$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство \bar{E}_N функционалов, определенных на пространстве E_N . В силу теоремы 14.2 об общем виде линейного функционала в E_N между функционалами $f \in \bar{E}_N$ и функциями $u(x) \in L_M^*$

существует взаимно однозначное соответствие, определенное формулой .

$$f(v) = \int_G v(x) u(x) dx \quad (u(x) \in L_M^*, v(x) \in E_N). \quad (14.7)$$

При этом в силу определения E_N -слабой сходимости последовательности функций $u_n(x) \in L_M^*$, E_N -слабо сходящейся к функции $u(x) \in L_M^*$, взаимно однозначно соответствует последовательность функционалов

$$f_n(v) = \int_G v(x) u_n(x) dx,$$

слабо сходящаяся к функционалу

$$f(v) = \int_G v(x) u(x) dx.$$

Пусть $l_0(u)$ — некоторый E_N -слабо непрерывный функционал, определенный на пространстве L_M^* . Определим на пространстве \bar{E}_N функционал $\Phi(f)$ ($f \in \bar{E}_N$) следующим равенством:

$$\Phi(f) = l_0(u), \quad (14.8)$$

где $u(x) \in L_M^*$ — функция, соответствующая функционалу f в силу взаимно однозначного соответствия, установленного между функционалами на E_N и функциями пространства L_M^* .

Очевидно, что из E_N -слабой непрерывности функционала $l_0(u)$ на L_M^* следует слабая непрерывность функционала $\Phi(f)$ на \bar{E}_N . Так как пространство E_N сепарабельно, то в силу теоремы Банаха об общем виде слабо непрерывного функционала в сопряженном пространстве *) существует такая функция $v_0(x) \in E_N$, что

$$\Phi(f) = f(v_0)$$

*) Эта теорема Банаха (см. [3]) гласит: *если E — сепарабельное пространство, а $\Phi(f)$ — слабо непрерывный на сопряженном к нему пространстве \bar{E} функционал, то существует такой элемент $v_0 \in \bar{E}$, что*

$$\Phi(f) = f(v_0)$$

для всех $f \in \bar{E}$.

для всех $f \in E_N$, т. е.

$$I_0(u) = \int_G v_0(x) u(x) dx$$

для всех $u(x) \in L_M^*$.

Теорема доказана.

5. Норма функционала и $\|v\|_{(N)}$. Если в пространстве L_M^* рассматривать норму Люксембурга $\|u\|_{(M)}$ (см. § 9, пункт 7), то норма каждого линейного функционала $I(u)$, допускающего интегральное представление (14.1), определится равенством

$$\|I\|_{(M)} = \sup_{\|u\|_{(M)} \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right|,$$

и в силу (9.25)

$$\|I\|_{(M)} = \|v\|_{(N)}.$$

Имеет место и следующее равенство:

$$\|I\| = \|v\|_{(N)}, \quad (14.9)$$

где через $\|I\|$ обозначена обычная норма функционала (14.1). Это равенство совпадает с равенством

$$\|v\|_{(N)} = \sup_{\|u\|_M \leq 1} \left| \int_G u(x) u(x) dx \right|. \quad (14.10)$$

Для доказательства (14.10) заметим, что из (9.26) следует неравенство

$$\sup_{\|u\|_M \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| \leq \|v\|_{(N)}.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\sup_{\|u\|_M \leq 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| \geq \|v\|_{(N)}. \quad (14.11)$$

Обозначим через T единичный шар $\|v\|_{(N)} \leq 1$, рассматриваемый как подмножество пространства L_1 суммируемых на G функций.

Выпуклое множество T замкнуто по норме L_1 , так как из

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G |v_n(x) - w(x)| dx = 0 \quad (v_n(x) \in T)$$

следует, что $v_n(x)$ сходятся к $w(x)$ по мере, причем в силу теоремы Фату и (9.21)

$$\int_G N[w(x)] dx \leq \sup_n \int_G N[v_n(x)] dx \leq 1.$$

Пусть $v_0(x)$ — некоторая ненулевая фиксированная функция из пространства L_N^* . Очевидно, функция

$$(1 + \varepsilon) \frac{v_0(x)}{\|v_0\|_{(N)}} \in T, \quad \text{где } \varepsilon > 0.$$

Как известно [3], можно построить такой линейный функционал $f(v)$, определенный на L_1 , что

$$f\left[(1 + \varepsilon) \frac{v_0(x)}{\|v_0\|_{(N)}}\right] > f(v) \quad (v(x) \in T). \quad (14.12)$$

Функционал $f(v)$ допускает [2] интегральное представление

$$f(v) = \int_G v(x) h(x) dx \quad (v(x) \in L_1),$$

где $h(x)$ — некоторая в существенном ограниченная функция. Поэтому из (14.12) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1 + \varepsilon}{\|v_0\|_{(N)}} \int_G v_0(x) h(x) dx &\geq \sup_{v \in T} \int_G v(x) h(x) dx = \\ &= \sup_{\|v\|_{(N)} \leq 1} \int_G |v(x)| |h(x)| dx \end{aligned}$$

и в силу (9.25)

$$\frac{1 + \varepsilon}{\|v_0\|_{(N)}} \int_G v_0(x) h(x) dx \geq \|h\|_M.$$

Отсюда

$$(1 + \varepsilon) \int_G v_0(x) \frac{h(x)}{\|h\|_M} dx \geq \|v_0\|_{(N)},$$

и в силу произвольности ε .

$$\int_G v_0(x) \frac{h(x)}{\|h\|_M} dx \geq \|v_0\|_{(N)}.$$

Из этого неравенства вытекает (14.11).

ГЛАВА III

ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

§ 15. Условия непрерывности линейных интегральных операторов

1. Постановка задачи. Во всей главе изучаются линейные операторы A , действующие из одного пространства Орлича $L_{M_1}^*$ в другое пространство $L_{M_2}^*$. Через $\{B_1 \rightarrow B_2\}$ будем обозначать класс линейных операторов, действующих из пространства B_1 в пространство B_2 . Класс непрерывных операторов будем обозначать через $\{B_1 \rightarrow B_2; н.\}$, а класс вполне непрерывных — через $\{B_1 \rightarrow B_2; вп. н.\}$.

В основном нас будут интересовать интегральные операторы вида

$$Au(x) = \int_G k(x, y)u(y)dy. \quad (15.1)$$

Основная задача настоящего параграфа заключается в выяснении условий, при которых оператор (15.1) непрерывен как оператор, действующий из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$, т. е. удовлетворяет условию

$$\|Au\|_{M_2} \leq \|A\| \|u\|_{M_1},$$

где $\|A\|$ — некоторое число.

Условия непрерывности оператора A будем искать, естественно, в различных характеристиках ядра $k(x, y)$. Наиболее удобной такой характеристикой является принадлежность ядра некоторому пространству Орлича, т. е. конечность интеграла

$$\int_G \int_G \Psi[\alpha k(x, y)] dx dy$$

при некотором α .

Ниже через \hat{G} обозначается топологическое произведение $G \times G$ с естественно введенной мерой. Через \hat{L}_M , \hat{L}_M^* , \hat{E}_M будем обозначать соответственно класс и пространства $L_M(\hat{G})$, $L_M^*(\hat{G})$ и $E_M(\hat{G})$.

2. Общая теорема. Через $N_1(v)$ и $N_2(v)$, как обычно, будем обозначать N -функции, дополнительные к заданным N -функциям $M_1(u)$ и $M_2(u)$.

Теорема 15.1. Пусть $\Phi(u)$ — такая N -функция, что при $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}$,

$$w(x, y) = u(y)v(x) \in \hat{L}_\Phi^*, \quad (15.2)$$

причем

$$\|w(x, y)\|_{\hat{\Phi}} \leq l \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2}, \quad (15.3)$$

где l — некоторая постоянная. Пусть ядро $k(x, y)$ линейного интегрального оператора (15.1) принадлежит пространству \hat{L}_Ψ^* , где $\Psi(v)$ — N -функция, дополнительная к N -функции $\Phi(u)$.

Тогда оператор (15.1) принадлежит $\{L_{M_1}^* \rightarrow L_{M_2}^*; \text{н.}\}$.

Доказательство. В силу неравенства Гельдера и (15.3) при $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}$

$$\int_G \mathbf{A} u(x) v(x) dx = \int_G \int_G k(x, y) u(y) v(x) dx dy \leq \\ \leq \|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}} \|w(x, y)\|_{\hat{\Phi}} \leq l \|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}} \|v\|_{N_2} \|u\|_{M_1}, \quad (15.4)$$

откуда следует, что оператор \mathbf{A} действует из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$.

Так как $\|v\|_{N_2} \leq 2$ при $\rho(v; N_2) \leq 1$, то из (15.4) вытекает, что

$$\|\mathbf{A}u\|_{M_2} = \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G \mathbf{A}u(x)v(x) dx \right| \leq \\ \leq 2l \|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}} \|u\|_{M_1}. \quad (15.5)$$

Таким образом, оператор \mathbf{A} ограничен и, следовательно, непрерывен.

Теорема доказана.

Из неравенства (15.5) получаем оценку для нормы оператора A :

$$\|A\| = \sup_{\|u\|_{M_1} \leq 1} \|Au\|_{M_2} \leq 2l \|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}}. \quad (15.6)$$

Эта оценка, конечно, является завышенной. Ее можно во многих случаях улучшить. Один из способов улучшения оценки нормы оператора A может быть основан на применении усиленного неравенства Гельдера (9.26).

3. Существование функции $\Phi(u)$. Применение теоремы 15.1 требует знания такой функции $\Phi(u)$, для которой выполнены условия (15.2) и (15.3).

Лемма 15.1. Пусть N -функция $\Phi(u)$ определена как дополнительная к N -функции

$$\Psi(v) = M_2 [N_1(v)]. \quad (15.7)$$

Тогда выполняются условия (15.2) и (15.3).

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}^*$. Покажем вначале, что выполняется условие (15.2), т. е. что функция $w(x, y) = u(y)v(x)$ принадлежит пространству \hat{L}_{Φ}^*

Пусть $g(x, y) \in \hat{L}_{\Psi}$. Так как

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\hat{G}} w(x, y) g(x, y) dx dy \right| &\leq \\ &\leq \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2} \iint_{\hat{G}} |g(x, y)| \frac{|u(y)|}{\|u\|_{M_1}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx dy, \end{aligned}$$

то в силу неравенства Юнга (2.6), примененного к первым двум множителям, стоящим под знаком интеграла в правой части,

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\hat{G}} w(x, y) g(x, y) dx dy \right| &\leq \\ &\leq \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2} \left\{ \iint_{\hat{G}} N_1 [g(x, y)] \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx dy + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{\hat{G}} M_1 \left[\frac{|u(y)|}{\|u\|_{M_1}} \right] \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx dy \right\}. \end{aligned}$$

Применяя к первому слагаемому в фигурных скобках снова неравенство Юнга, получим:

$$\left| \int_{\hat{G}} \int \omega(x, y) g(x, y) dx dy \right| \leq \\ \leq \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2} \left\{ \int_{\hat{G}} \int M_2 [N_1 [g(x, y)]] dx dy + \right. \\ \left. + \int_{\hat{G}} \int N_2 \left[\frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} \right] dx dy + \int_G M_1 \left[\frac{|u(y)|}{\|u\|_{M_1}} \right] dy \int_{\hat{G}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx \right\}. \quad (15.8)$$

Так как

$$\int_{\hat{G}} N_2 \left[\frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} \right] dx \leq 1, \quad \int_G M_1 \left[\frac{|u(y)|}{\|u\|_{M_1}} \right] dy \leq 1,$$

а функция $v(x)$ суммируема, то из (15.8) вытекает, что

$$\left| \int_{\hat{G}} \int \omega(x, y) g(x, y) dx dy \right| \leq \\ \leq \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2} \left\{ \int_{\hat{G}} \int \Psi [g(x, y)] dx dy + \text{mes } G + \int_{\hat{G}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx \right\}, \quad (15.9)$$

откуда и следует (15.2). В силу неравенства Юнга

$$\int_{\hat{G}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx \leq \int_{\hat{G}} N_2 \left[\frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} \right] dx + M_2(1) \text{mes } G \leq \\ \leq 1 + M_2(1) \text{mes } G.$$

Поэтому, если $\rho(g(x, y); \Psi) \leq 1$, то из (15.9) следует, что

$$\|\omega(x, y)\|_{\hat{\Phi}} = \sup_{\rho(g; \Psi) \leq 1} \left| \int_{\hat{G}} \int \omega(x, y) g(x, y) dx dy \right| \leq \\ \leq l \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2},$$

где

$$l = 2 + \text{mes } G + M_2(1) \text{mes } G. \quad (15.10)$$

Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 15.2. Пусть N -функция $\Phi(u)$ определена как дополнительная к N -функции

$$\Psi(v) = N_1[M_2(v)]. \quad (15.11)$$

Тогда выполняются условия (15.2) и (15.3).

В условиях леммы 15.2 постоянная l определяется равенством

$$l = 2 + \text{mes } G + N_1(1) \text{mes } G. \quad (15.12)$$

4. Об одном свойстве N -функций, удовлетворяющих Δ' -условию. При исследовании линейных интегральных операторов важную роль играют такие N -функции $M(u)$, что из $u(x), v(x) \in L_M^*$ следует $u(y)v(x) \in \hat{L}_M^*$. В этом пункте выясняется, какие N -функции обладают этим свойством. Очевидно, указанным свойством обладают N -функции $M(u) = k|u|^\alpha$ ($\alpha > 1$).

Лемма 15.3. Пусть из $u(x), v(x) \in L_M^*$ следует, что функция $w(x, y) = u(y)v(x) \in \hat{L}_M^*$.

Тогда N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Доказательство. Допустим, что N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда найдется такая монотонная неограниченно возрастающая последовательность чисел u_n , что

$$M(2u_n) > 2^{2n} M(2^n) M(u_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (15.13)$$

Построим такие непересекающиеся множества $G_n \subset G$, что

$$\text{mes } G_n = \frac{M(2) \text{mes } G}{2^n M(2^n)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и такие непересекающиеся множества $\mathcal{E}_n \subset G$, что

$$\text{mes } \mathcal{E}_n = \frac{M(u_1) \text{mes } G}{2^n M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Положим

$$v(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{если } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0, & \text{если } x \in \bar{\bigcup}_{n=1}^{\infty} G_n, \end{cases}$$

и

$$u(x) = \begin{cases} u_n, & \text{если } x \in \mathcal{E}_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0, & \text{если } x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_G M[v(x)] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[v(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} M(2^n) \text{mes } G_n = \\ &= M(2) \text{mes } G < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_G M[u(x)] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{E}_n} M[u(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n) \text{mes } \mathcal{E}_n = \\ &= M(u_1) \text{mes } G < \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны, при сколь угодно большом k

$$\begin{aligned} \iint_{\hat{G}} M\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right] dx dy &= \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \iint_{G_i \mathcal{E}_j} M\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right] dx dy = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{2^i u_j}{k}\right) \text{mes } G_i \text{mes } \mathcal{E}_j \gg \\ &\gg \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{2^n u_n}{k}\right) \text{mes } G_n \text{mes } \mathcal{E}_n \gg \sum_{n=m}^{\infty} M(2u_n) \frac{M(2)M(u_1)(\text{mes } G)^2}{2^{2n}M(2^n)M(u_n)}, \end{aligned}$$

где $2^{m-1} > k$. Отсюда в силу (15.13)

$$\iint_{\hat{G}} M\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right] dx dy = \infty.$$

Таким образом, $u(x), v(x) \in L_M^*$, а $u(y)v(x) \notin \widehat{L}_M^*$.
Лемма доказана.

Теорема 15.2. Для того, чтобы для любой пары функций $u(x), v(x) \in L_M^*$ произведение $\omega(x, y) = u(y)v(x)$

принадлежало пространству \hat{L}_M^* , необходимо и достаточно, чтобы N -функция $M(u)$ удовлетворяла Δ' -условию.

Доказательство достаточности. Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, т. е. существуют такие положительные постоянные u_0 и C , что

$$M(uv) \leq CM(u)M(v) \quad (u, v \geq u_0). \quad (15.14)$$

В силу леммы 5.1 функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Поэтому $L_M^* = L_M$.

Пусть $u(x), v(x) \in L_M$. Обозначим через G_u (соответственно G_v) множество $G\{|u(x)| \geq u_0\}$ (соответственно $G\{|v(x)| \geq u_0\}$), где u_0 — число, фигурирующее в условии (15.14). Тогда в силу этого условия при $x \in G_v, y \in G_u$

$$M[u(y)v(x)] \leq CM[u(y)]M[v(x)].$$

Из этого неравенства и очевидного равенства

$$\begin{aligned} \iint_{\hat{G}} M[u(y)v(x)] dx dy &= \\ &= \int_{G_u} \int_{G_v} M[u(y)v(x)] dx dy + \int_{G \setminus G_u} \int_{G_v} M[u(y)v(x)] dx dy + \\ &+ \int_{G_u} \int_{G \setminus G_v} M[u(y)v(x)] dx dy + \int_{G \setminus G_u} \int_{G \setminus G_v} M[u(y)v(x)] dx dy \end{aligned}$$

вытекает, что

$$\begin{aligned} \iint_{\hat{G}} M[u(y)v(x)] dx dy &\leq \\ &\leq C \int_G M[u(y)] dy \int_G M[v(x)] dx + \text{mes } G \int_G M[u_0 v(x)] dx + \\ &+ \text{mes } G \int_G M[u_0 u(y)] dy + M(u_0^2) (\text{mes } G)^2, \quad (15.15) \end{aligned}$$

и так как $u_0 v(x), u_0 u(x) \in L_M$, то $u(y)v(x) \in \hat{L}_M = \hat{L}_M^*$.

Доказательство необходимости. Пусть функция $w(x, y) = u(y)v(x) \in \hat{L}_M^*$, если $u(x), v(x) \in L_M^*$. В силу леммы 15.3 N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Поэтому $\hat{L}_M^* = \hat{L}_M$.

Допустим, что N -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ' -условию. Тогда найдутся такие монотонные неограниченно возрастающие последовательности положительных чисел u_n, v_n ($n = 1, 2, \dots$), что

$$M(u_n v_n) > 2^{2n} M(u_n) M(v_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (15.16)$$

Построим множества $G_n \subset G$ и $\mathcal{E}_n \subset G$, у которых

$$\text{mes } G_n = \frac{M(u_1) \text{mes } G}{2^n M(u_n)}, \quad \text{mes } \mathcal{E}_n = \frac{M(v_1) \text{mes } G}{2^n M(v_n)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

причем $G_i \cap G_j = 0, \mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = 0$ ($i \neq j$). Положим

$$u(x) = \begin{cases} u_n, & \text{если } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0, & \text{если } x \in \bar{\bigcup}_{n=1}^{\infty} G_n, \end{cases}$$

и

$$v(x) = \begin{cases} v_n, & \text{если } x \in \mathcal{E}_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0, & \text{если } x \in \bar{\bigcup}_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_G M[u(x)] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[u(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n) \text{mes } G_n = \\ &= M(u_1) \text{mes } G < \infty \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_G M[v(x)] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{E}_n} M[v(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} M(v_n) \text{mes } \mathcal{E}_n = \\ &= M(v_1) \text{mes } G < \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_G \int_G M[u(y)v(x)] dx dy &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{G_i} \int_{\mathcal{E}_j} M[u(y)v(x)] dx dy = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M(u_i v_j) \text{mes } G_i \text{mes } \mathcal{E}_j \geq \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n v_n) \frac{M(u_1) M(v_1) (\text{mes } G)^2}{2^{2n} M(u_n) M(v_n)}, \end{aligned}$$

и в силу (15.16)

$$\int_{\hat{G}} \int M[u(y)v(x)] dx dy = \infty.$$

Таким образом, $u(x) \in L_M$, $v(x) \in L_M$, а $w(x, y) = u(y)v(x) \notin \hat{L}_M = \hat{L}_M^*$. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что не для всех N -функций (даже удовлетворяющих Δ_2 -условию) из $u(x) \in L_M^*$, $v(x) \in L_M^*$ вытекает $u(y)v(x) \in \hat{L}_M^*$.

Лемма 15.4. Пусть N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию. Тогда найдется такая постоянная $a > 0$, что

$$\|u(y)v(x)\|_M \leq a \|u\|_M \|v\|_M \quad (15.17)$$

при $u(x), v(x) \in L_M$.

Доказательство. Пусть при $u, v \geq u_0 > 1$

$$M(uv) \leq CM(u)M(v).$$

В силу (15.15)

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} \int M\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0 \|u\|_M \cdot u_0 \|v\|_M}\right] dx dy &\leq \\ &\leq C \int_{\hat{G}} M\left[\frac{u(y)}{\|u\|_M}\right] dy \int_{\hat{G}} M\left[\frac{v(x)}{\|v\|_M}\right] dx + \\ + \text{mes } G \left\{ \int_{\hat{G}} M\left[\frac{u(y)}{\|u\|_M}\right] dy + \int_{\hat{G}} M\left[\frac{v(x)}{\|v\|_M}\right] dx \right\} + M(u_0^2)(\text{mes } G)^2, \end{aligned}$$

и, так как $\rho\left(\frac{u}{\|u\|_M}; M\right) \leq 1$, $\rho\left(\frac{v}{\|v\|_M}; M\right) \leq 1$, то

$$\int_{\hat{G}} \int M\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0^2 \|u\|_M \cdot \|v\|_M}\right] dx dy \leq C + 2 \text{mes } G + M(u_0^2)(\text{mes } G)^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(y)v(x)}{u_0^2 \|u\|_M \|v\|_M} \right\|_M &\leq 1 + \int_{\hat{G}} \int M\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0^2 \|u\|_M \|v\|_M}\right] dx dy \leq \\ &\leq 1 + C + 2 \text{mes } G + M(u_0^2)(\text{mes } G)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (15.17), в котором

$$a = u_0^2 [1 + C + 2 \operatorname{mes} G + M (u_0^2) (\operatorname{mes} G)^2]. \quad (15.18)$$

Лемма доказана.

Пусть $Q(u)$ и $R(u)$ —две N -функции. Напомним, что соотношение $Q(u) \rightarrow R(u)$ означает существование таких постоянных k и $u_0 > 0$, что

$$Q(u) \leq R(ku) \quad (u \geq u_0).$$

В силу теоремы 13.1 соотношение $Q(u) \rightarrow R(u)$ равносильно включению $L_R^* \subset L_Q^*$. Напомним также (теорема 13.3), что из включения $L_R^* \subset L_Q^*$ вытекает существование такой постоянной $q > 0$, что

$$\|u\|_Q \leq q \|u\|_R \quad (u(x) \in L_R^*).$$

Теорема 15.3. Пусть N -функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, причем

$$\Phi(u) \rightarrow M_1(u), \quad \Phi(u) \rightarrow N_2(u). \quad (15.19)$$

Тогда выполняются условия (15.2) и (15.3).

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}^*$. В силу (15.19) $u(x) \in L_\Phi$, $v(x) \in L_\Phi$. Тогда в силу леммы 15.4 $w(x, y) = u(y)v(x) \in \hat{L}_\Phi$ и

$$\|u(y)v(x)\|_\Phi \leq a \|u\|_\Phi \|v\|_\Phi.$$

Из (15.19) вытекает существование таких постоянных q_1 и q_2 , что

$$\|u\|_\Phi \leq q_1 \|u\|_{M_1} \quad (u(x) \in L_{M_1}^*), \quad \|v\|_\Phi \leq q_2 \|v\|_{N_2} \quad (v(x) \in L_{N_2}^*).$$

Поэтому

$$\|u(y)v(x)\|_\Phi \leq l \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2},$$

где $l = a q_1 q_2$.

Теорема доказана.

Б. Достаточные условия непрерывности.

Теорема 15.4 (Основная теорема о непрерывности). Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ —дополнительные друг к другу N -функции. Пусть ядро $k(x, y)$ линейного интегрального оператора (15.1) принадлежит пространству \hat{L}_{Ψ}^* .

Тогда оператор (15.1) принадлежит $\{L_{M_1}^* \rightarrow L_{M_2}^*; \mathfrak{H}\}$, если выполнено одно из следующих условий:

а) $M_2[N_1(v)] \rightarrow \Psi(v), \quad (15.20)$

б) $N_1[M_2(v)] \rightarrow \Psi(v), \quad (15.21)$

в) функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ' -условию и

$$N_1(v) \rightarrow \Psi(v), \quad M_2(v) \rightarrow \Psi(v). \quad (15.22)$$

Доказательство. В силу теоремы 3.1 из условия а) вытекает условие леммы 15.1, из условия б) вытекает условие леммы 15.2, а из условия в) — условие теоремы 15.3. В этих леммах и теореме 15.3 утверждается, что выполнены условия теоремы 15.1, из которой вытекает доказываемое предложение.

Теорема доказана.

Отметим, что N -функция $\Psi(v)$, фигурирующая в условии в), должна удовлетворять условию

$$|v|^\alpha \rightarrow \Psi(v), \quad (15.23)$$

где $\alpha > 1$. Это следует из того очевидного факта, что условию (15.23) удовлетворяет каждая N -функция, дополнительная к которой удовлетворяет Δ_2 -условию.

Условия а), б), в) теоремы 15.4 не эквивалентны. Поэтому, например, при выборе функции $\Psi(v)$, удовлетворяющей условию (15.20) или (15.21), естественно вначале выяснить, какая из суперпозиций, $M_2[N_1(v)]$ или $N_1[M_2(v)]$, растет «медленнее». Возникает предположение о том, что для ответа на этот вопрос достаточно знать, какое из двух соотношений $N_1(u) \rightarrow M_2(u)$ или $M_2(u) \rightarrow N_1(u)$ имеет место. Оказывается, что это не так.

Например, при $N_1(u) = u^2$, $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ имеет место соотношение $N_1(u) \rightarrow M_2(u)$. При этом N -функции $N_1[M_2(v)]$ и $M_2[N_1(v)]$ не эквивалентны и $N_1[M_2(v)] \rightarrow M_2[N_1(v)]$, так как

$$N_1[M_2(v)] \sim M_2(v), \quad M_2[N_1(v)] \sim e^{v^2} - 1$$

и при любом $k > 0$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{N_1[M_2(kv)]}{M_2[N_1(v)]} = 0.$$

Для N -функций $N_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ и $M_2(u) = e^{u^2} - 1$ также справедливо соотношение $N_1(u) \rightarrow M_2(u)$; N -функции $N_1[M_2(v)]$ и $M_2[N_1(v)]$ снова не эквивалентны, однако $M_2[N_1(v)] \rightarrow N_1[M_2(v)]$, так как при любом $k > 0$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{N_1[M_2(v)]}{M_2[N_1(kv)]} = \infty.$$

Детальное сравнение условий а), б) и в) теоремы 15.4 будет проведено ниже.

6. О расщеплении непрерывного оператора. Пусть A — положительно определенный самосопряженный линейный оператор, действующий в пространстве L^2 функций, суммируемых с квадратом на G . Как известно [2], оператор A допускает спектральное разложение

$$A = \int_0^{\infty} \lambda dE_{\lambda},$$

где E_{λ} — спектральная функция оператора A . Оператор A^2 тогда допускает спектральное разложение

$$A^2 = \int_0^{\infty} \lambda^2 dE_{\lambda}.$$

В случае, когда оператор A вполне непрерывен, спектральное разложение заменяется бесконечным рядом

$$A\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (e_i, \varphi) e_i(x) \quad (\varphi(x) \in L^2), \quad (15.24)$$

где $e_i(x)$ — собственные функции оператора A , соответствующие отличным от нуля собственным числам λ_i . Через (e, φ) обозначается скалярное произведение функций $e(x)$ и $\varphi(x)$:

$$(e, \varphi) = \int_G e(x) \varphi(x) dx.$$

В этом случае

$$A^2 \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 (e_i, \varphi) e_i(x).$$

Говорят, что оператор B , действующий из банахового пространства E_1 в банахово пространство E_2 с областью определения $D(B)$, допускает непрерывное продолжение \bar{B} , если $\bar{B} \in \{E_1 \rightarrow E_2; \text{н.}\}$ и $\bar{B}\varphi = B\varphi$ при $\varphi \in D(B)$.

Теорема 15.5. Пусть $M(u)$ и $N(u)$ — взаимно дополнителные N -функции, причем $N(u) \rightarrow u^2 \rightarrow M(u)$. Пусть оператор A^2 (A — положительно определенный самосопряженный линейный оператор из $\{L^2 \rightarrow L^2; \text{н.}\}$) допускает непрерывное продолжение в оператор $\bar{A}^2 \in \{E_N \rightarrow L_M^*; \text{н.}\}$.

Тогда $A \in \{L^2 \rightarrow L_M^*; \text{н.}\}$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in L^2$. Тогда по неравенству Гельдера

$$\|A\varphi\|_{L^2}^2 = (A^2\varphi, \varphi) = (\bar{A}^2\varphi, \varphi) \leq \| \bar{A}^2\varphi \|_M \|\varphi\|_N \leq \| \bar{A}^2 \| \|\varphi\|_N^2,$$

т. е.

$$\|A\varphi\|_{L^2} \leq k \|\varphi\|_N \quad (\varphi(x) \in L^2). \quad (15.25)$$

L^2 плотно в E_N , так как содержит все ограниченные функции. Поэтому из (15.25) вытекает, что оператор A допускает непрерывное продолжение на все E_N . Продолженный оператор будем обозначать через A_1 . Скалярное произведение $l(\varphi) = (A_1\varphi, \psi)$, где $\psi(x)$ — фиксированный элемент из L^2 , определяет линейный непрерывный функционал на E_N . По теореме 14.2 об общем виде линейного функционала на E_N найдется такая функция $u(x) \in L_M^*$, что

$$l(\varphi) = (\varphi, u) = \int_G \varphi(x) u(x) dx.$$

Определим оператор A_1^* равенством

$$A_1^*\psi(x) = u(x).$$

В силу (10.4)

$$\|A_1^*\psi\|_M = \sup_{\substack{\rho(\varphi; N) \leq 1 \\ \varphi(x) \in E_N}} |(A_1^*\psi, \varphi)| \leq \sup_{\substack{\|\varphi\|_N \leq 2 \\ \varphi(x) \in E_N}} |(\psi, A_1\varphi)| \leq 2k \|\psi\|_{L^2}.$$

Следовательно, оператор A_1^* принадлежит $\{L^2 \rightarrow L_M^*; \text{н.}\}$. Покажем, что $A_1^*\psi(x) = A\psi(x)$, если $\psi(x) \in L^2$. Это следует из

того, что для любой функции $\varphi(x) \in L^2$

$$(A_1^* \psi, \varphi) = (\psi, A_1 \varphi) = (\psi, A \varphi) = (A \psi, \varphi).$$

Теорема доказана.

Корень квадратный $A^{\frac{1}{2}}$ из оператора A определяется как такой оператор, квадрат которого равен A . Оператор $A^{\frac{1}{2}}$ имеет спектральное разложение

$$A^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} dE_{\lambda},$$

а в случае вполне непрерывного оператора (15.24)

$$A^{\frac{1}{2}} \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\frac{1}{2}} (e_i, \varphi) e_i(x).$$

Теорема 15.6. Пусть положительно определенным самосопряженным непрерывным в L^2 линейным оператором A допускает непрерывное продолжение в оператор $\bar{A} \in \{E_N \rightarrow L_M^*; \text{н.}\}$, где $N(u) \rightarrow u^2 \rightarrow M(u)$.

Тогда оператор A допускает представление

$$\bar{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*, \quad (15.26)$$

где $\mathbf{H} \in \{L^2 \rightarrow L_M^*; \text{н.}\}$, а \mathbf{H}^* — сопряженный к \mathbf{H} оператор из $\{E_N \rightarrow L^2; \text{н.}\}^*$.

Доказательство. Положим $\mathbf{H} = A^{\frac{1}{2}}$. В силу теоремы 15.5 \mathbf{H} принадлежит $\{L^2 \rightarrow L_M^*; \text{н.}\}$. Оператор $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ на L^2 принимает те же значения, что и оператор A , так как для любой пары функций $\varphi(x), \psi(x) \in L^2$

$$(\mathbf{H}\mathbf{H}^* \varphi, \psi) = (\mathbf{H}^* \varphi, \mathbf{H}^* \psi) = \left(A^{\frac{1}{2}} \varphi, A^{\frac{1}{2}} \psi \right) = (A \varphi, \psi).$$

Поэтому, оператор $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ является непрерывным продолжением оператора A в оператор из $\{E_N \rightarrow L_M^*; \text{н.}\}$.

) Оператор \mathbf{H}^ определяется при помощи равенства

$$(\mathbf{H}^* \varphi, \psi) = (\varphi, \mathbf{H} \psi) \quad (\psi(x) \in L^2, \varphi(x) \in E_N).$$

Равенство (15.26) вытекает из того факта, что непрерывное продолжение оператора A единственно, так как L^2 плотно в E_N по норме пространства E_N .

Теорема доказана.

Представление $\bar{A} = NN^*$ будем называть *расщеплением оператора A* .

§ 16. Условия полной непрерывности линейных интегральных операторов

1. Случай непрерывных ядер. Продолжим изучение линейного интегрального оператора

$$Au(x) = \int_G k(x, y) u(y) dy. \quad (16.1)$$

В настоящем параграфе изучается вопрос об условиях полной непрерывности оператора (16.1), т. е. об условиях, при выполнении которых оператор (16.1) преобразует единичный шар пространства $L_{M_1}^*$ в компактное множество пространства $L_{M_2}^*$.

Лемма 16.1. Пусть ядро $k(x, y)$ непрерывно на \hat{G} . Пусть $L_{M_1}^*$ и $L_{M_2}^*$ — два произвольных пространства Орлича. Тогда оператор (16.1) принадлежит $\{L_{M_1}^* \rightarrow E_{M_2}; \text{вп. н.}\}$.

Доказательство. В силу теоремы 15.4 оператор A принадлежит $\{L_{M_1}^* \rightarrow L_{M_2}^*; \text{н.}\}$.

Пусть T — единичный шар пространства $L_{M_1}^*$. Так как

$$\int_G |u(x)| dx \leq \|u\|_{M_1} \|x(x; G)\|_{N_1} \leq \text{mes } GM_1^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G} \right)$$

для $u(x) \in T$, то при $x \in G$, $u(x) \in T$

$$|Au(x)| = \left| \int_G k(x, y) u(y) dy \right| \leq K \text{mes } GM_1^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G} \right),$$

где $K = \max |k(x, y)| \quad (x, y \in G)$.

Значит, функции $|Au(x)|$ ($u(x) \in T$) равномерно ограничены.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $\delta > 0$, что

$$|k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{\text{mes } GM_1^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G} \right)}$$

при $d(x_1, x_2) < \delta$, где через $d(x_1, x_2)$ обозначено расстояние между точками $x_1, x_2 \in G$. Тогда при $d(x_1, x_2) < \delta$ для любой функции $u(x) \in T$ в силу формулы для нормы характеристической функции множества G в пространстве $L_{N_1}^*$

$$\begin{aligned} |Au(x_1) - Au(x_2)| &\leq \int_G |k(x_1, y) - k(x_2, y)| |u(y)| dy \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\text{mes } GM_1^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes } G} \right)} \int_G |u(y)| dy \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $Au(x)$ ($u(x) \in T$) равномерно непрерывны.

В силу теоремы Арцела множество AT компактно в пространстве C непрерывных на G функций и, тем более, компактно в любом пространстве Орлича.

Так как функции $Au(x)$ непрерывны, то они принадлежат E_{M_2} .

Лемма доказана.

2. Основная теорема. Условия полной непрерывности операторов вида (16.1) можно получить, используя признаки компактности семейства функций в пространствах Орлича. Более простой путь заключается в установлении возможности сколь угодно точной аппроксимации оператора (16.1) заведомо вполне непрерывным оператором. В качестве таких аппроксимирующих операторов удобно рассматривать также интегральные операторы, но с непрерывными ядрами.

В некоторых случаях условия теорем 15.1 и 15.4 являются достаточными для полной непрерывности оператора (16.1). Неизвестно, достаточны ли они в общем случае. Оказывается, что полная непрерывность оператора (16.1) будет гарантирована, если условие $k(x, y) \in \hat{L}_\Psi^*$ в теоремах 15.1 и 15.4 заменить более жестким условием $k(x, y) \in \hat{E}_\Psi$. Мы докажем то из соответствующих двух утверждений, которое будет в дальнейшем использовано.

Теорема 16.1 (Теорема о достаточных условиях полной непрерывности.) Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ — дополнительные друг к другу N -функции. Пусть ядро $k(x, y)$ линейного интегрального оператора (16.1) принадлежит пространству \hat{E}_Ψ . Тогда каждое из условий

а), б), в) теоремы 15.4:

а) $M_2[N_1(v)] \rightarrow \Psi(v)$,

б) $N_1[M_2(v)] \rightarrow \Psi(v)$,

в) функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ' -условию и

$$N_1(v) \rightarrow \Psi(v), \quad M_2(v) \rightarrow \Psi(v),$$

достаточно для того, чтобы оператор (16.1) принадлежал $\{L_{M_1}^* \rightarrow E_{M_2}; \text{ в. п. н.}\}$.

Доказательство. Так как $k(x, y) \in \hat{E}_\Psi$, то можно построить такую последовательность $k_n(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывных ядер, что

$$\|k(x, y) - k_n(x, y)\|_\Psi < \frac{1}{n}.$$

Через A_n будем обозначать линейные интегральные операторы

$$A_n u(x) = \int_G k_n(x, y) u(y) dy.$$

Эти операторы в силу леммы 16.1 действуют из $L_{M_1}^*$ в E_{M_2} и вполне непрерывны.

В условиях доказываемой теоремы выполнены и условия теоремы 15.1. Поэтому в силу (15.6)

$$\|A - A_n\| \leq 2l \|k(x, y) - k_n(x, y)\|_\Psi < \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Значит, оператор A можно с любой точностью аппроксимировать по норме вполне непрерывным оператором со значениями в E_{M_2} . Отсюда и следует утверждение теоремы.

Теорема 16.1 может применяться в двух различных вариантах.

Во-первых, может ставиться задача о свойствах функции $\Psi(v)$, при которых оператор (16.1) действует из заданного пространства $L_{M_1}^*$ в заданное пространство E_{M_2} и вполне непрерывен. В этом случае применение теоремы 16.1 упирается в проверку того факта, принадлежит ли ядро $k(x, y)$ пространству \hat{E}_Ψ , т. е. выполняется ли при всех $\lambda > 0$ условие

$$\int \int_G \Psi[\lambda k(x, y)] dx dy < \infty. \quad (16.2)$$

Если N -функция $\Psi(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то (16.2) равносильно условию

$$\int_{\hat{G}} \Psi [k(x, y)] dx dy < \infty. \quad (16.3)$$

Если же N -функция $\Psi(v)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то проверка условия (16.2) становится затруднительной. Нетрудно видеть, что (16.2) выполняется, если

$$\int_{\hat{G}} \Psi \{Q[k(x, y)]\} dx dy < \infty, \quad (16.4)$$

где $Q(u)$ — некоторая N -функция. Отметим также, что в условиях (16.2), (16.3) и (16.4) вместо функции $\Psi(v)$ можно писать любую другую функцию $R(v)$, являющуюся главной частью N -функции, которая эквивалентна $\Psi(v)$.

Во-вторых, может ставиться задача об отыскании таких N -функций $M_1(u)$ и $M_2(u)$, чтобы оператор (16.1) с заданным ядром $k(x, y)$ действовал из $L_{M_1}^*$ в E_{M_2} и был вполне непрерывен. N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ тогда выбираются так, чтобы выполнялось одно из условий (15.20), (15.21) или (15.22).

3. Полная непрерывность и E_N -слабая сходимость. Как известно, вполне непрерывные линейные операторы, действующие из одного банахова пространства в другое, преобразуют слабо сходящиеся последовательности элементов в последовательности, сходящиеся по норме.

Так как класс E_N -слабо сходящихся последовательностей в пространстве Орлича, вообще говоря, шире класса последовательностей, слабо сходящихся в обычном смысле, то для того чтобы вполне непрерывный линейный оператор, действующий из одного пространства Орлича $L_{M_1}^*$ в другое пространство Орлича $L_{M_2}^*$, обладал аналогичным свойством в отношении E_N -слабой сходимости, требуются дополнительные условия.

Мы здесь выясним этот вопрос для линейного интегрального оператора (16.1). При этом мы будем предполагать, что ядро $k(x, y)$ оператора A удовлетворяет следующему

условию: для любой пары функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}^*$

$$\int_G \int_G k(x, y) u(y) v(x) dx dy < \infty. \quad (16.5)$$

В силу этого условия оператор A действует из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$, а оператор A^* , определенный равенством

$$A^*v(x) = \int_G k(y, x) v(y) dy, \quad (16.6)$$

действует из $L_{N_2}^*$ в $L_{N_1}^*$, причем для любой пары функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}^*$ имеет место равенство

$$\int_G Au(x) v(x) dx = \int_G u(y) A^*v(y) dy. \quad (16.7)$$

Лемма 16.2. Для того, чтобы непрерывный линейный интегральный оператор A с ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условию (16.5), преобразовывал каждую E_{N_1} -слабо сходящуюся последовательность функций из $L_{M_1}^$ в E_{N_2} -слабо сходящуюся последовательность функций из $L_{M_2}^*$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A^* действовал из E_{N_2} в E_{N_1} .*

Доказательство. Достаточность условия леммы очевидна, так как в силу равенства (16.7) последовательность чисел

$$l(Au_n) = \int_G Au_n(x) v(x) dx$$

сходится для любой функции $v(x) \in E_{N_2}$ в силу того, что $A^*v(x) \in E_{N_1}$.

Докажем необходимость условия леммы. Пусть непрерывный линейный интегральный оператор A каждую E_{N_1} -слабо сходящуюся последовательность функций из $L_{M_1}^*$ преобразует в E_{N_2} -слабо сходящуюся последовательность функций из $L_{M_2}^*$. Пусть $v(x) \in E_{N_2}$. Тогда функционал $l(u)$, определенный на $L_{M_1}^*$ равенством

$$l(u) = \int_G Au(x) v(x) dx,$$

будет E_{N_1} -слабо непрерывным функционалом на $L_{M_1}^*$. В силу теоремы 14.7 этот функционал представим в виде

$$I(u) = \int_G u(x) v^*(x) dx,$$

где $v^*(x) \in E_{N_1}$.

Так как, с другой стороны, в силу (16.7)

$$\int_G u(x) v^*(x) dx = \int_G u(x) A^* v(x) dx$$

для любой функции $u(x) \in L_{M_1}^*$, то почти при всех $x \in G$

$$v^*(x) = A^* v(x),$$

т. е. $A^* v(x) \in E_{N_1}$.

Лемма доказана.

Из этой леммы немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 16.2. *Для того, чтобы вполне непрерывный линейный интегральный оператор A с ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условию (16.5), преобразовывал всякую E_{N_1} -слабо сходящуюся последовательность функций из $L_{M_1}^*$ в последовательность функций, сходящуюся по норме L_{M_2} , необходимо и достаточно, чтобы оператор A^* действовал из E_{N_2} в E_{N_1} .*

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидным образом вытекает из леммы 16.2. Достаточность следует из леммы 16.2, теоремы 14.3 и теоремы 14.5.

Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 16.1 о полной непрерывности оператора (16.1) выполняется условие (16.5) и оператор A^* , определенный равенством (16.6), действует из $L_{N_2}^*$ в E_{N_1} (и, тем более, из E_{N_2} в E_{N_1}). Докажем последнее утверждение.

В условиях теоремы 16.1 выполнены условия (15.2) и (15.3). Пусть $v(x) \in L_{N_2}^*$ и ε — произвольное положительное число. Так как ядро $k(x, y)$, принадлежащее \hat{E}_Ψ , имеет в \hat{L}_Ψ^* абсолютно непрерывную норму, то можно указать

такое $\delta > 0$, что из $\text{mes } \hat{\mathcal{E}} < \delta$ вытекает

$$\|k(x, y) \times(x, y; \hat{\mathcal{E}})\|_{\Psi} < \frac{\varepsilon}{2\|v\|_{N_2}} \quad (\hat{\mathcal{E}} \subset \hat{G}),$$

l — постоянная из условия (15.3). Пусть $\mathcal{E} \subset G$, $u(x) \in L_{M_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} A^*v(x) u(x) dx &= \int_{\mathcal{E}} \int_G k(y, x) v(y) u(x) dx dy = \\ &= \int_{\hat{\mathcal{E}}} \int k(y, x) v(y) u(x) dx dy, \end{aligned}$$

где $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times G$.

Пусть теперь $\text{mes } \mathcal{E} < \frac{\delta}{\text{mes } G}$ и $\rho(u, M) \leq 1$. Тогда $\text{mes } \hat{\mathcal{E}} = \text{mes } \mathcal{E} \text{mes } G < \delta$, $\|u\|_M \leq 1 + \rho(u, M) \leq 2$. Применяя к последнему интегралу неравенство Гельдера и (15.3), получим:

$$\left| \int_{\mathcal{E}} A^*v(x) u(x) dx \right| \leq l \|k(x, y) \times(x, y; \hat{\mathcal{E}})\|_{\Psi} \cdot 2\|v\|_{N_2} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\|A^*v(x) \times(x; \mathcal{E})\|_{N_1} < \varepsilon$, коль скоро $\text{mes } \mathcal{E} < \frac{\delta}{\text{mes } G}$. Таким образом, функция $A^*v(x)$ имеет в $L_{N_1}^*$ абсолютно непрерывную норму и, следовательно, принадлежит E_{N_1} .

Таким образом, в условиях теоремы 16.1 без других дополнительных предположений оператор (16.1) преобразует каждую E_{N_1} -слабо сходящуюся последовательность функций в последовательность функций, сходящуюся по норме $L_{M_2}^*$.

Отметим еще, что утверждение теоремы 16.2 остается в силе для абстрактных линейных вполне непрерывных операторов A , если N -функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, а оператор A^* определим следующим образом. Пусть $v(x) \in L_{N_2}^*$. Рассмотрим линейный функционал, определенный на $L_{M_1}^* = E_{M_1}$ равенством

$$l(u) = \int_G Au(x) v(x) dx.$$

В силу теоремы 14.2 этот функционал представим в виде

$$I(u) = \int_G u(x) v^*(x) dx,$$

где $v^*(x) \in L_{N_1}^*$. Положим $A^*v(x) = v^*(x)$. Таким образом, оператор A^* действует из $L_{N_2}^*$ в $L_{N_1}^*$ и имеет место равенство (16.7).

4. Теорема Цанена.

Лемма 16.3. Пусть ядро $k(x, y)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

а) почти при всех $x \in G$ ядро $k(x, y)$ как функция от y принадлежит пространству $L_{N_1}^*$, причем функция $\varphi(x) = \|k(x, y)\|_{N_1}$ принадлежит пространству $L_{M_2}^*$;

б) почти при всех $y \in G$ ядро $k(x, y)$ как функция от x принадлежит пространству $L_{M_2}^*$, причем функция $\psi(y) = \|k(x, y)\|_{M_2}$ принадлежит пространству $L_{N_1}^*$.

Тогда оператор (16.1) принадлежит $\{L_{M_1}^* \rightarrow L_{M_2}^*; n.\}$.

Доказательство. Пусть выполнено условие а).

Тогда для любых функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}$ в силу неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} \left| \int_G Au(x)v(x) dx \right| &\leq \int_G \left| \int_G k(x, y)u(y) dy \right| |v(x)| dx \leq \\ &\leq \|u\|_{M_1} \int_G \varphi(x) |v(x)| dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\|Au\|_{M_2} = \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G Au(x)v(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_{N_2} \|u\|_{M_1}.$$

Если выполнено условие б), то, изменяя порядок интегрирования (что возможно в силу теоремы Фубини), получим для любых функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_G Au(x)v(x) dx \right| &\leq \int_G \left| \int_G k(x, y)v(x) dx \right| |u(y)| dy \leq \\ &\leq \|v\|_{N_2} \int_G \psi(y) |u(y)| dy \leq \|v\|_{N_2} \|\psi\|_{N_1} \|u\|_{M_1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|Au\|_{M_2} &= \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G Au(x)v(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{\|v\|_{N_2} \leq 2} \left| \int_G Au(x)v(x) dx \right| \leq 2\|\varphi\|_{N_1}\|u\|_{M_1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 16.3. Пусть ядро $k(x, y)$ почти при всех $x \in G$ как функция от y принадлежит E_{N_1} , причем функция $\varphi(x) = \|k(x, y)\|_{N_1}$ принадлежит E_{M_2} . Тогда оператор (16.1) принадлежит $\{L_{M_1}^* \rightarrow E_{M_2}; \text{вп. н}\}$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы оператор (16.1) действует из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$ и непрерывен. Осталось показать, что этот оператор преобразует единичный шар T пространства $L_{M_1}^*$ в множество функций, компактное в E_{M_2} . В силу E_{N_1} -слабой компактности шара T достаточно показать, что оператор A преобразует E_{N_1} -слабо сходящуюся последовательность функций шара T в последовательность функций из E_{M_2} , сходящуюся по норме.

Пусть последовательность $u_n(x) \in T (n=1, 2, \dots)$ E_{N_1} -слабо сходится к функции $u_0(x)$. В силу условия теоремы последовательность функций $Au_n(x) (n=1, 2, \dots)$ сходится к функции $Au_0(x)$ почти везде и, следовательно, сходится к этой функции по мере. Покажем, что функции $Au_n(x)$ имеют в $L_{M_2}^*$ равномерно абсолютно непрерывные нормы. Пусть $\chi(x, \mathcal{E})$ — характеристическая функция множества $\mathcal{E} \subset G$, $v(x) \in L_{N_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{E}} Au_n(x)v(x) dx \right| &\leq \int_{\mathcal{E}} \left| \int_G k(x, y)u_n(y) dy \right| |v(x)| dx \leq \\ &\leq \int_{\mathcal{E}} \varphi(x) |v(x)| dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|Au_n(x)\chi(x; \mathcal{E})\|_{M_2} &= \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_{\mathcal{E}} Au_n(x)v(x) dx \right| \leq \\ &\leq \|\varphi(x)\chi(x; \mathcal{E})\|_{M_2}. \end{aligned}$$

Так как функция $\varphi(x) \in E_{M_2}$, то отсюда и следует, что функции $Au_n(x)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы.

В силу леммы 11.2 последовательность $Au_n(x)$, принадлежащая E_{M_2} , сходится по норме.

Теорема доказана.

Теорема 16.3 может быть дополнена следующим утверждением:

Теорема 16.4. Пусть ядро $k(x, y)$ почти при всех $y \in G$ как функция от x принадлежит E_{M_2} , причем функция $\psi(y) = \|k(x, y)\|_{M_2}$ принадлежит E_{N_1} . Тогда оператор (16.1) принадлежит $\{E_{M_1} \rightarrow E_{M_2}; \text{вп. н.}\}$.

Доказательство. В силу леммы 16.3

$$A \in \{L_{M_1}^* \rightarrow L_{M_2}^*; \text{н.}\}.$$

Рассмотрим оператор A^* , определенный равенством (16.6). В силу теоремы 16.3 оператор A^* принадлежит $\{L_{N_2}^* \rightarrow E_{N_1}; \text{вп. н.}\}$ и преобразует каждую E_{M_2} -слабо сходящуюся последовательность функций из $L_{N_2}^*$ в последовательность функций из E_{N_1} , сходящуюся по норме. В силу теоремы 16.2 оператор $A = (A^*)^*$ действует из E_{M_1} и E_{M_2} . Для завершения доказательства остается доказать, что оператор A преобразует каждую E_{N_1} -слабо сходящуюся последовательность функций из единичного шара T пространства $L_{M_1}^*$ в последовательность, сходящуюся по норме $L_{M_2}^*$.

Пусть последовательность функций $u_n(x) \in T$ ($n=1, 2, \dots$) E_{N_1} -слабо сходится к функции $u_0(x)$. Легко видеть, что $\|u_0\|_{M_1} \leq 2$. Последовательность $Au_n(x)$ E_{N_2} -слабо сходится к функции $Au_0(x)$, так как для каждой функции $v(x) \in E_{N_2}$ в силу равенства (16.7)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G A [u_n(x) - u_0(x)] v(x) dx &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G [u_n(x) - u_0(x)] A^* v(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через $A^*v_1(x), A^*v_2(x), \dots, A^*v_s(x)$ конечную $\frac{\varepsilon}{6}$ -сеть множества $\{A^*v\}$ ($\rho(v; N_2) \leq 1$), компактного в силу полной непрерывности оператора A^* . Тогда для каждой функции $v(x) \in L_{N_2}$ ($\rho(v; N_2) \leq 1$) можно указать такую функцию $v_{i(v)}(x)$, что

$$\|A^*v - A^*v_{i(v)}\|_{N_1} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Пусть при $n \geq n_0$ выполняются неравенства

$$\int_G [u_n(x) - u_0(x)] A^*v_i(x) dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Тогда при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|Au_n - Au_0\|_{M_2} &= \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G A [u_n(x) - u_0(x)] v(x) dx \right| = \\ &= \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G [u_n(x) - u_0(x)] A^*v(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \left| \int_G [u_n(x) - u_0(x)] A^*v_{i(v)}(x) dx \right| + \\ &+ \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \int_G |u_n(x) - u_0(x)| |A^*v(x) - A^*v_{i(v)}(x)| dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|u_n - u_0\|_{M_1} \sup_{\rho(v; N_2) \leq 1} \|A^*v_{i(v)} - A^*v\|_{N_1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. последовательность $Au_n(x)$ сходится по норме к $Au_0(x)$. Теорема доказана.

Отметим, что достаточность условия а) теоремы 16.1 может быть получена и как следствие теоремы 16.3. Пусть, действительно, ядро $k(x, y)$ принадлежит пространству $\dot{E}_{M_2, [N_1]}$. Тогда при любом $\lambda > 0$

$$\int \int_G M_2 \{N_1 [\lambda k(x, y)]\} dx dy < \infty. \quad (16.8)$$

Отсюда следует, что выполнены условия теоремы 16.3.

В самом деле, из (16.8) вытекает, что при любом $\lambda > 0$ почти при всех $x \in G$

$$\int_G N_1[\lambda k(x, y)] dx < \infty.$$

Это означает, что почти при всех $x \in G$ ядро $k(x, y)$ как функция от y принадлежит пространству E_{N_1} . Для функции $\varphi(x) = \|k(x, y)\|_{N_1}$ в силу (9.12) справедлива оценка

$$\varphi(x) \leq 1 + \int_G N_1[k(x, y)] dy.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что при любом $\mu > (2 \text{mes } G)^{-1}$

$$\int_G M_2[\mu\varphi(x)] dx < \infty.$$

Это следует из (16.8), так как в силу интегрального неравенства Иенсена

$$\begin{aligned} \int_G M_2[\mu\varphi(x)] dx &\leq \int_G M_2\left\{\mu + \mu \int_G N_1[k(x, y)] dy\right\} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} M_2(2\mu) \text{mes } G + \frac{1}{2} \int_G M_2\left\{\frac{\int_G N_1[2\mu \text{mes } G k(x, y)] dy}{\text{mes } G}\right\} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} M_2(2\mu) \text{mes } G + \\ &+ \frac{1}{2 \text{mes } G} \int \int_{\hat{G}} M_2\{N_1[2\mu \text{mes } G k(x, y)]\} dx dy < \infty. \end{aligned}$$

б. Сравнение условий. В качестве первого примера рассмотрим простейший случай, когда $L_{M_1}^* = L_{M_2}^* = L^2$. В этом случае условия а) и б) теоремы 16.1 означают, что ядро $k(x, y)$ должно удовлетворять соотношению

$$\int \int_{\hat{G}} k^4(x, y) dx dy < \infty.$$

Если же воспользоваться условием в), выбрав в качестве функции $\Psi(v)$ функцию v^2 , то окажется, что для полной непре-

рывности оператора (16.1) в L^2 достаточно выполнения соотношения

$$\int_{\hat{G}} \int k^2(x, y) dx dy < \infty. \quad (16.9)$$

Условие (16.9) менее ограничительно.

Заметим, что известное условие (16.9) не является необходимым для полной непрерывности линейного интегрального оператора в L^2 . Ясно, что и все указанные выше условия полной непрерывности для случая произвольных пространств Орлича являются только достаточными.

В качестве второго примера отметим, что из того же условия в) теоремы 16.1 следует, что линейный интегральный оператор (16.1) действует из L^{α_1} в L^{α_2} ($\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$) и вполне непрерывен, если ядро $k(x, y)$ суммируемо на G со степенью, равной $\max\{\beta_1, \alpha_2\}$, где $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} = 1$. Для получения этого известного результата (который, конечно, просто доказывается непосредственно) достаточно положить $\Psi(v) = |v|^{\max\{\beta_1, \alpha_2\}}$.

Пусть теперь $M_1(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|$, $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$. В этом случае $N_1(u) = M_2(u)$. Из теоремы 16.1 следуют три условия, достаточных для того, чтобы оператор (16.1) действовал из $L_{M_1}^* = L_M$ в E_{M_2} и был вполне непрерывен. Эти условия можно записать в виде

$$\int_{\hat{G}} \int \exp\{\exp|\lambda k(x, y)|\} dx dy < \infty,$$

если воспользоваться условиями а) или б), и в виде

$$\int_{\hat{G}} \int \exp|\lambda k(x, y)| dx dy < \infty, \quad (16.10)$$

если воспользоваться условием в), положив $\Psi(v) = M_2(v)$.

Таким образом, и в этом примере условие в) оказывается менее ограничительным.

Последний пример является иллюстрацией следующей теоремы (непосредственно вытекающей из теоремы 16.1), которая будет играть важную роль при изучении интегральных уравнений с существенно нестепенными нелинейностями.

Теорема 16.5. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — дополнительные друг к другу N -функции, причем $N(v)$ удовлетворяет Δ' -условию. Пусть при любом $\lambda > 0$

$$\int_{\mathfrak{G}} \int M[\lambda k(x, y)] dx dy < \infty.$$

Тогда линейный интегральный оператор (16.1) принадлежит $\{L_N \rightarrow E_M; \text{вп. н.}\}$.

В очередном примере положим $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > 1$), $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$. Для полной непрерывности оператора 16.1 достаточно: в силу условия а)

$$\int_{\mathfrak{G}} \int \exp |\lambda k(x, y)|^\beta dx dy < \infty \quad \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right)$$

при любом $\lambda > 0$, а в силу условий б) или в)

$$\int_{\mathfrak{G}} \int \exp |\lambda k(x, y)| dx dy < \infty.$$

Второе условие, конечно, менее ограничительно. Заметим еще, что оно совпадает с условием (16.10), полученным в предыдущем примере. Это не случайно, так как имеет место следующее общее утверждение:

Теорема 16.6. Пусть

$$M_1(u) \rightarrow \Phi_1(u), \quad \Phi_2(u) \rightarrow M_2(u). \quad (16.11)$$

Тогда каждый линейный оператор из $\{L_{M_1}^* \rightarrow E_{M_2}; \text{вп. н.}\}$ принадлежит $\{L_{\Phi_1}^* \rightarrow E_{\Phi_2}; \text{вп. н.}\}$.

Доказательство. Тот факт, что $A \in \{L_{\Phi_1}^* \rightarrow E_{\Phi_2}\}$, следует из включений

$$L_{\Phi_1}^* \subset L_{M_1}^*, \quad E_{M_2} \subset E_{\Phi_2}.$$

В силу теоремы 13.3 и (16.11) имеют место неравенства

$$\|u\|_{M_1} \leq q_1 \|u\|_{\Phi_1}, \quad (u(x) \in L_{\Phi_1}^*)$$

и

$$\|u\|_{\Phi_2} \leq q_2 \|u\|_{M_2}, \quad (u(x) \in L_{M_2}^*).$$

Пусть T — ограниченное множество в $L_{\Phi_1}^*$. В силу первого из этих неравенств T ограничено и в $L_{M_1}^*$. Поэтому множество AT компактно в $L_{M_2}^*$. В силу второго неравенства оно компактно и в $L_{\Phi_2}^*$.

Теорема доказана.

Из предыдущих примеров вытекает, что условие в) в ряде случаев менее ограничительно, чем условия а) и б). Приведем теперь пример, который показывает, что это не всегда так.

Пусть

$$M_1(u) = e^{-|u|} - |u| - 1,$$

$$M_2(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|.$$

В этом случае $E_{M_2} = L_{M_2}^* = L_{M_1}$. Из условий а) и б) теоремы 16.1 вытекает, что оператор (16.1) принадлежит $\{L_{M_1}^* \rightarrow E_{M_2}; \text{вп. н.}\}$, если выполнено неравенство

$$\int \int_{\hat{G}} |k(x, y)| \ln^2(1 + |k(x, y)|) dx dy < \infty. \quad (16.12)$$

Применение условия в) приводит к предположению, что (см. замечание на стр. 169) ядро $k(x, y)$ суммируемо с некоторой степенью $\alpha > 1$, т. е. приводит к более ограниченному условию.

Резюмируя все сказанное выше, можно сформулировать правило для нахождения функции $\Psi(v)$, удовлетворяющей условиям теоремы 16.1.

Мы будем при этом предполагать, что любые две рассматриваемые N -функции $\Phi_1(u)$ и $\Phi_2(u)$ «сравнимы», т. е. что выполняется одно из соотношений: $\Phi_1(u) \rightarrow \Phi_2(u)$ или $\Phi_2(u) \rightarrow \Phi_1(u)$. В первом случае мы будем говорить, что $\Phi_1(u)$ «меньше», чем $\Phi_2(u)$, во втором — $\Phi_1(u)$ «больше», чем $\Phi_2(u)$.

Пусть заданы пространства $L_{M_1}^*$ и $L_{M_2}^*$. Рассмотрим N -функции $M_1(u)$ и $N_2(u)$. Если «меньшая» из них удовлетворяет Δ' -условию, то дополнительную к ней будем считать равной $\Psi(v)$. Очевидно, в этом случае выполнено условие в), которое приводит к наименьшим (по сравнению с условиями а) и б)) ограничениям относительно ядра $k(x, y)$.

Если же «меньшая» из функций $M_1(u)$ и $N_2(u)$ не удовлетворяет Δ' -условию, то возможны два случая:

1. Обе функции $M_1(u)$ и $N_2(u)$ растут быстрее любой степенной $|u|^\alpha$ ($\alpha > 1$). Будем предполагать, что они удовлетворяют Δ_3 -условию. Тогда функции $N_1(v)$ и $M_2(v)$ растут медленнее любой степенной $|v|^\beta$ ($\beta > 1$). Используя условие а) или б) теоремы 16.1 и теорему 6.9, мы можем положить $\Psi(v) = \frac{N_1(v)M_2(v)}{|v|}$, которая эквивалентна в этом случае одной из функций $M_2[N_1(v)]$ или $N_1[M_2(v)]$ и «меньше» другой. Легко видеть, что функция $\Psi(v)$ также растет медленнее любой степенной вида $|v|^\beta$ ($\beta > 1$). Любая же функция $\Psi(v)$, удовлетворяющая условию в) в силу замечания на стр. 169, растет быстрее некоторой степенной функции $|v|^{\beta_0}$ ($\beta_0 > 1$), что приводит к большему ограничению относительно ядра $k(x, y)$.

2. «Меньшая» из функций $M_1(u)$ и $N_2(u)$ не удовлетворяет Δ' -условию, но не удовлетворяет и Δ_3 -условию. В этом случае можно пользоваться условием в), взяв в качестве функции $\Psi(v)$ некоторую N -функцию, большую чем $N_1(v)$ и $M_2(v)$, но дополнительная к которой удовлетворяет Δ' -условию. Можно пользоваться и условиями а) или б), взяв в качестве функции $\Psi(v)$ функцию $M_2[N_1(v)]$ или $N_1[M_2(v)]$. В некоторых случаях к меньшему ограничению относительно ядра $k(x, y)$ приводит первый путь, в других случаях — второй. Поясним это примерами.

Пусть $M_1(u) = \frac{u^2}{2}$, $M_2(u) = u^2(|\ln |u|| + 1)$. Функция $N_2(u)$ в этом случае эквивалентна N -функции $\frac{u^2}{\ln(|u| + e)} \rightarrow M_1(u)$ и не удовлетворяет Δ' -условию. Используя условие в), положив $\Psi(v) = |v|^{2+\varepsilon}$, где ε — некоторое положительное число, мы придем к следующему ограничению относительно ядра $k(x, y)$:

$$\int \int_{\hat{G}} |k(x, y)|^{2+\varepsilon} dx dy < \infty.$$

Применение условий а) или б) приводит к худшим условиям:

$$\int \int_{\hat{G}} |k(x, y)|^4 \ln^2(|k(x, y)| + 1) dx dy < \infty,$$

или соответственно

$$\int \int_{\mathfrak{G}} |k(x, y)|^4 \ln(|k(x, y)| + 1) dx dy < \infty.$$

Пусть теперь

$$M_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1, \quad M_2(u) = u^2(|\ln|u|| + 1).$$

N -функция $N_2(u)$ в этом случае также «меньше» $M_1(u)$ и не удовлетворяет Δ' -условию. Применение условия а) приводит к ограничению на ядро $k(x, y)$:

$$\int \int_{\mathfrak{G}} |k(x, y)|^2 \ln^3(|k(x, y)| + 1) dx dy < \infty,$$

применение условия б) — к ограничению

$$\int \int_{\mathfrak{G}} |k(x, y)|^2 \ln^2(|k(x, y)| + 1) dx dy < \infty.$$

Для применения же условия в) надо взять в качестве функции $\Phi(u)$, дополнительной к $\Psi(v)$, функцию, «меньшую» чем $\frac{u^2}{\ln(|u| + e)}$ и удовлетворяющую Δ' -условию. Такой функцией может быть, например, функция $|u|^{2-\epsilon}$, где $0 < \epsilon < 1$. Но тогда функция $\Psi(v)$ будет расти как $|v|^{2+\epsilon_1}$ ($\epsilon_1 > 0$), что приводит к худшему условию.

6. О расщеплении вполне непрерывного оператора.

Теорема 16.7. Пусть $M(u)$ и $N(u)$ — взаимно дополнительные N -функции, причем $N(u) \rightarrow u^2 \rightarrow M(u)$. Пусть оператор A^2 (A — положительно определенный самосопряженный линейный оператор из $\{L^2 \rightarrow L^2; \text{вп. н.}\}$) допускает непрерывное продолжение в оператор $\bar{A}^2 \in \{E_N \rightarrow L_M^*; \text{вп. н.}\}$.

Тогда $A \in \{L^2 \rightarrow L_M^*; \text{вп. н.}\}$.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 15.5, то $A \in \{L^2 \rightarrow L_M^*; \text{н.}\}$.

Пусть A_1 — оператор, действующий из E_N в L^2 , введенный при доказательстве теоремы 15.5. Как было доказано, A является сопряженным к A_1 оператором. Поэтому для

доказательства полной непрерывности оператора A достаточно доказать, что вполне непрерывен оператор A_1 .

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ — слабо сходящаяся в E_N последовательность функций из L^2 . Тогда $A_1\varphi_i(x) = A\varphi_i(x)$ и

$$\begin{aligned} \|A_1(\varphi_n - \varphi_m)\|_{L^2}^2 &= (A_1^2(\varphi_n - \varphi_m), \varphi_n - \varphi_m) \leq \\ &\leq \|A^2(\varphi_n - \varphi_m)\|_M \|\varphi_n - \varphi_m\|_N. \end{aligned}$$

Первый множитель в правой части стремится к нулю, так как оператор A^2 по предположению вполне непрерывен и преобразует каждую слабо сходящуюся в E_N последовательность функций в последовательность, сходящуюся по норме в L_M^* . Второй множитель в правой части ограничен.

Следовательно, последовательность $A_1\varphi_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ сходится по норме в L^2 .

Пусть теперь $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ — произвольная последовательность, слабо сходящаяся в E_N . Так как L^2 плотно в E_N , то можно указать такую последовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ в L^2 , что $\|\varphi_n - \psi_n\|_N \rightarrow 0$. Последовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ также слабо сходится. Как уже доказано, последовательность $A_1\varphi_n(x)$ сходится по норме L^2 . Поэтому последовательность $A_1\psi_n(x)$ также сходится по норме L^2 , так как

$$\begin{aligned} \|A_1(\psi_n - \psi_m)\|_{L^2} &\leq \|A_1(\varphi_n - \varphi_m)\|_{L^2} + \\ &+ \|A_1(\varphi_n - \psi_n)\|_{L^2} + \|A_1(\varphi_m - \psi_m)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 15.6, приходим к следующему предложению:

Теорема 16.8. Пусть положительно определенный самосопряженный вполне непрерывный в L^2 линейный оператор A допускает непрерывное продолжение в оператор $\bar{A} \in \{E_N \rightarrow L_M^*; \text{вп. н.}\}$, где $N(u) \rightarrow u^2 \rightarrow M(u)$.

Тогда оператор A расщепляем, т. е.

$$\bar{A} = NN^*,$$

где $N \in \{L^2 \rightarrow L_M^*; \text{вп. н.}\}$, а N^* — сопряженный к N оператор из $\{E_N \rightarrow L^2; \text{вп. н.}\}$.

7. Об операторах типа потенциала. Предположим, что G есть замкнутая ограниченная область (с достаточно гладкой границей) в n -мерном пространстве.

Оператором типа потенциала называют линейный интегральный оператор, ядро которого симметрично и удовлетворяет условию

$$|k(x, y)| \leq \frac{a}{r^\lambda} \quad (x, y \in G), \quad (16.13)$$

где r — расстояние между точками x и y .

Детальная теория операторов типа потенциала развита С. Л. Соболевым [60] в связи с теоремами вложения. С. Л. Соболев и другие авторы показали, что при определенных соотношениях между числами λ , α и размерностью пространства n оператор типа потенциала действует из пространства L^α в определенные пространства L^{α_1} или пространство C непрерывных функций. В частности, при $\lambda = \frac{n}{2}$ оператор типа потенциала по теоремам С. Л. Соболева действует из пространства L^2 в любое пространство L^{α_1} ($\alpha_1 > 1$).

Теоремы о расщеплении линейных операторов позволяют это утверждение усилить.

Пусть A — линейный интегральный оператор, действующий в L^2 , ядро которого удовлетворяет условию (16.13), в котором $\lambda = \frac{n}{2}$. Тогда оператор A^2 также будет линейным интегральным оператором с ядром

$$k_2(x, y) = \int_G k(x, z) k(z, y) dz.$$

Непосредственный подсчет с использованием условия (16.13) показывает, что

$$|k_2(x, y)| \leq b + c |\ln |r||. \quad (16.14)$$

Следовательно, $k_2(x, y) \in \dot{L}_\Psi^*$, где $\Psi(u) = e^{|u|} - |u| - 1$.

В силу теоремы 15.4 оператор \bar{A}^2 , определенный ядром $k_2(x, y)$, действует из пространства $E_\Phi = L_\Phi^*$, где $\Phi(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|$, в L_Ψ^* и является непрерывным оператором. \bar{A}^2 является непрерывным продолжением

оператора A^2 . Применяя теорему 15.5, приходим к выводу, что $A \in \{L^2 \rightarrow L_{\Psi}^*; \text{н.}\}$.

Пусть $\Psi_1(u) = |u|(e^{|u|^{1-\varepsilon}} - 1)$, где $0 < \varepsilon < 1$. Нетрудно видеть, что $\Psi_1(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию. Поэтому дополнительная функция $\Phi_1(u)$ удовлетворяет Δ' -условию. Построенное выше ядро $k_2(x, y)$ принадлежит пространству \hat{E}_{Ψ_1} , так как

$$\int \int_{\hat{\sigma}} \Psi_1 \left\{ |k_2(x, y)|^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \right\} dx dy < \infty.$$

В силу теоремы 16.1 оператор \bar{A}^2 действует из $E_{\Phi_1} = L_{\Phi_1}^*$ в $L_{\Psi_1}^*$. Применяя теорему 16.7, приходим к выводу, что $A \in \{L^2 \rightarrow L_{\Psi_1}^*; \text{вп. н.}\}$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 16.9. Пусть симметричное ядро $k(x, y)$ удовлетворяет условию (16.13), где $\lambda = \frac{n}{2}$. Тогда линейный интегральный оператор A , определенный ядром $k(x, y)$, действует из L^2 в L_{Ψ}^ , где $\Psi(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, и непрерывен, а как оператор, действующий из L^2 в $L_{\Psi_1}^*$, где $\Psi_1(u) = |u|(e^{|u|^{1-\varepsilon}} - 1)$ ($0 < \varepsilon < 1$), он вполне непрерывен.*

Как известно, функция Грина $k(x, y)$ оператора Лапласа (для случая однородных граничных условий) для четырехмерной области удовлетворяет неравенству

$$|k(x, y)| \leq \frac{a}{r^2}.$$

Мы находимся в условиях теоремы 16.9. Следовательно, функция Грина в случае четырехмерной области порождает линейный интегральный оператор, принадлежащий $\{L^2 \rightarrow L_{\Psi}^*; \text{н.}\}$ и $\{L^2 \rightarrow L_{\Psi_1}^*; \text{вп. н.}\}$, где $\Psi(u)$ и $\Psi_1(u)$ — определенные выше N -функции.

Отметим еще один факт. Функция Грина оператора Лапласа для двумерной области удовлетворяет условию

$$|k(x, y)| < b + c |\ln |r||.$$

Из теоремы 15.6 следует, что линейный оператор A , определенный этой функцией Грина, расщепляем в том смысле.

что он представим в виде $A = HH^*$, где $H \in \{L^2 \rightarrow L^2_\Psi; \text{н.}\}$ и H^* — сопряженный оператор из $\{E_\Phi \rightarrow L^2; \text{н.}\}$.

Из теоремы 16.8 вытекает аналогичное представление $A = HH^*$, где $H \in \{L^2 \rightarrow L^2_\Psi; \text{вп. н.}\}$, $H^* \in \{E_\Phi \rightarrow L^2; \text{вп. н.}\}$.

В последних двух утверждениях N -функции $\Psi(u)$ и $\Psi_1(u)$ — функции, указанные в формулировке теоремы 16.9.

§ 17. Простейший нелинейный оператор

1. Условие Каратеодори. Говорят, что вещественная функция $f(x, u)$ двух переменных $x \in G$, $-\infty < u < \infty$, удовлетворяет *условию Каратеодори*, если она непрерывна по u почти при всех $x \in G$ и измерима по x при каждом фиксированном u .

Имеет место следующая

Теорема 17.1. *Функция $f(x, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори тогда и только тогда, когда произвольному $\varepsilon > 0$ соответствует такое замкнутое множество $G_0 \subset G$, что $\text{mes}(G \setminus G_0) < \varepsilon$, и на множестве $G_0 \times (-\infty, \infty)$ функция $f(x, u)$ непрерывна по совокупности переменных.*

Достаточность условия теоремы очевидна. Доказательство необходимости см. в [23], [21d].

Через f будем обозначать оператор, определенный на совокупности вещественных функций $u(x)$ ($x \in G$) равенством

$$fu(x) = f[x, u(x)]. \quad (17.1)$$

Если выполнено условие Каратеодори, то в силу теоремы 17.1 оператор f преобразует измеримые функции в измеримые, а последовательности функций, сходящиеся по мере, преобразует в последовательности функций, также сходящиеся по мере.

В дальнейшем, рассматривая операторы, определенные формулой (17.1), мы всегда будем предполагать, что соответствующие функции удовлетворяют условию Каратеодори.

2. Область определения оператора f . Напомним, что через $\Pi(E_M, r)$ обозначается совокупность функций $u(x) \in L^*_M$, для которых $d(u, E_M) < r$ (см. стр. 99). Через $T(u, r; E)$ будем обозначать шар радиуса r с центром в точке u банахова пространства E .

Лемма 17.1. Пусть

$$f_1(x, 0) \equiv 0 \quad (x \in G). \quad (17.2)$$

Пусть оператор f_1 действует из некоторого шара $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ в пространство $L_{M_2}^*$, класс L_{M_2} или E_{M_2} . Тогда оператор f_1 действует из $\Pi(E_{M_1}, r)$ соответственно в пространство $L_{M_2}^*$, класс L_{M_2} или E_{M_2} .

Если оператор f_1 действует из шара $T(\theta, r; E_{M_1})$ в $L_{M_2}^*$, L_{M_2} или E_{M_2} , то он действует из всего E_{M_1} соответственно в $L_{M_2}^*$, L_{M_2} или E_{M_2} .

Доказательство. Пусть $u(x) \in \Pi(E_{M_1}, r)$. В силу леммы 10.1 найдется такое множество $G_0 \subset G$, что $u(x) \times \times x(x; G_0) \in E_{M_1}$ и $\|u_0\|_{M_1} < r$, где $u_0(x) = u(x) \times x(x; G \setminus G_0)$. Функция $u(x) \times x(x, G_0)$ имеет абсолютно непрерывную норму. Поэтому функцию $u(x)$ можно записать в виде

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_k(x),$$

где $\|u_i\|_{M_1} < r$ ($i = 0, 1, \dots, k$), и при $i \neq j$

$$u_i(x) u_j(x) = 0 \quad (x \in G).$$

В силу (17.2)

$$f_1 u_i(x) f_1 u_j(x) = 0 \quad (x \in G, i \neq j), \quad (17.3)$$

и

$$f_1 u(x) = f_1 u_0(x) + f_1 u_1(x) + \dots + f_1 u_k(x). \quad (17.4)$$

Если $f_1 T(\theta, r; L_{M_1}^*) \subset L_{M_2}^*$, то каждое слагаемое в правой части формулы (17.4) является функцией из $L_{M_2}^*$. Поэтому и $f_1 u(x)$ принадлежит $L_{M_2}^*$.

Если $f_1 T(\theta, r; L_{M_1}^*) \subset L_{M_2}$, то в силу (17.3)

$$\int_G M[f_1 u(x)] dx = \sum_{i=0}^k \int_G M[f_1 u_i(x)] dx < \infty,$$

т. е. и $f_1 u(x) \in L_{M_2}$.

Если $f_1 T(\theta, r; L_{M_1}^*) \subset E_{M_2}$, то в правой части (17.4) все слагаемые являются функциями из E_{M_2} . Поэтому и $f_1 u(x) \in E_{M_2}$.

Если, наконец, f_1 рассматривать только на функциях из E_{M_1} , то $u_0(x) \equiv 0$. Поэтому из $f_1 T(\theta, r; E_{M_1}) \subset L_{M_2}^*$ следует,

что все слагаемые в правой части (17.4) принадлежат $L_{M_2}^*$, а следовательно, и $f_1 u(x) \in L_{M_2}^*$.

Аналогично рассматриваются и остальные случаи.

Лемма доказана.

Допустим, что N -функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда из леммы 17.1 вытекает, что оператор f_1 определен на всем пространстве $L_{M_1}^* = L_{M_1} = E_{M_1}$, если он определен на каком-нибудь шаре этого пространства. Естественно возникает вопрос о том, имеет ли место этот факт в случае, когда $M_1(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Оказывается, что нет.

Действительно, если $M_1(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то оператор

$$f_1 u(x) = M_2^{-1} \{ M_1 [u(x)] \} \quad (17.5)$$

действует из единичного шара пространства $L_{M_1}^*$ в L_{M_2} , так как при $\|u\|_{M_1} \leq 1$

$$\int_G M_2 [f_1 u(x)] dx = \int_G M_1 [u(x)] dx \leq \|u\|_{M_1} \leq 1.$$

Однако в любом шаре радиуса $r > 1$ можно указать такую функцию $u(x)$, что $f_1 u(x) \notin L_{M_2}$. Для этого достаточно выбрать функцию $u(x)$ с нормой $\|u\|_{M_1} < r$, не принадлежащую L_{M_1} .

Если N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то оператор (17.5) из единичного шара пространства $L_{M_1}^*$ действует одновременно в $L_{M_2}^*$, L_{M_2} и E_{M_2} , так как $L_{M_2}^* = L_{M_2} = E_{M_2}$. Однако не все его значения на шаре большего радиуса принадлежат $L_{M_2}^*$.

Теорема 17.2. Пусть оператор f действует из некоторого шара $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ в пространство L_{M_2} или пространство E_{M_2} . Тогда оператор f действует из $\Pi(E_{M_1}, r)$ соответственно в пространство $L_{M_2}^*$ или пространство E_{M_2} .

Если оператор f действует из шара $T(\theta, r; E_{M_1})$ в $L_{M_2}^*$ или E_{M_2} , то он действует из всего E_{M_1} соответственно в $L_{M_2}^*$ или E_{M_2} .

Доказательство. Функция $f_1(x, u) = f(x, u) - f(x, 0)$ удовлетворяет условию (17.2). Поэтому к оператору

$f_1 u(x) = f_1[x, u(x)]$ можно применить лемму 17.1. Отсюда и следует утверждение теоремы.

3. Теоремы о непрерывности. Нелинейный оператор \mathbf{B} , действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 , называется непрерывным в точке $u_0 \in E_1$, если

$$\lim_{\substack{u \in E_1, \\ \|u - u_0\|_{E_1} \rightarrow 0}} \|\mathbf{B}u - \mathbf{B}u_0\|_{E_2} = 0.$$

Для нелинейных операторов в отличие от линейных из непрерывности в одной точке не вытекает непрерывность в других точках. Вообще, нелинейный оператор может быть определен, как это мы видели на примере оператора f лишь на части пространства E_1 .

Нелинейный оператор \mathbf{B} называется ограниченным на шаре T пространства E_1 , если

$$\sup_{u \in T} \|\mathbf{B}u\|_{E_2} < \infty.$$

В отличие от линейных операторов, для нелинейных операторов понятия ограниченности и непрерывности не связаны друг с другом: существуют ограниченные разрывные операторы и, наоборот, непрерывные на всем пространстве операторы, но не ограниченные на некоторых шарах.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение из [21д, стр. 31, 35, 36]:

Лемма 17.2. Пусть оператор g действует из пространства L суммируемых функций в пространство L . Тогда по норме пространства L оператор g непрерывен и ограничен, а функция $g(x, u)$ удовлетворяет условию

$$|g(x, u)| \leq a(x) + b|u| \quad (x \in G, -\infty < u < \infty),$$

где $a(x) \in L$, а b — некоторое положительное число.

Теорема 17.3. Пусть оператор f действует из $\Pi(E_{M_1}, r)$ в E_{M_2} . Тогда оператор f непрерывен в каждой точке $\Pi(E_{M_1}, r)$.

Доказательство. Предположим вначале, что $f\theta = \theta$, и покажем, что оператор f непрерывен в нуле θ пространства $L_{M_1}^*$. В предположении противного существует такая последо-

вательность функций $u_n(x) \in L_{M_1}^*$ ($n = 1, 2, \dots$), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{M_1} = 0, \quad (17.6)$$

а

$$\|fu_n\|_{M_2} > \alpha \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (17.7)$$

где α — некоторое число. В силу леммы 9.2 из (17.6) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M_1 \left[\frac{2}{r} u_n(x) \right] dx = 0. \quad (17.8)$$

Из (17.7) следует, что

$$\int_G M_2 \left[\frac{2}{\alpha} fu_n(x) \right] dx \geq \left\| \frac{2}{\alpha} fu_n \right\|_{M_2} - 1 > 1. \quad (17.9)$$

Таким образом, если оператор f разрывен в нуле, то существует такая последовательность функций $u_n(x) \in L_{M_1}^*$, что имеют место соотношения (17.8) и (17.9).

Рассмотрим теперь оператор g , определенный формулой

$$gu(x) = M_2 \left\{ \frac{2}{\alpha} f \left(\frac{r}{2} M_1^{-1} [u(x)] \right) \right\}.$$

Если $u(x)$ — суммируемая функция, то $M_1^{-1} [u(x)] \in L_{M_1}$. В силу теоремы 10.1 $M_1^{-1} [u(x)] \in \Pi \left(E_{M_1}, \frac{3}{2} \right)$. Поэтому

$$\frac{r}{2} M_1^{-1} [u(x)] \in \Pi \left(E_{M_1}, \frac{3}{4} r \right).$$

По условию теоремы

$$f \left(\frac{r}{2} M_1^{-1} [u(x)] \right) \in E_{M_2}.$$

Значит, $gu(x) \in L$. В силу леммы 17.2 оператор g , действующий из L в L , непрерывен в нуле. Поэтому из (17.8) должно следовать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G g \left\{ M_1 \left[\frac{2}{r} u_n(x) \right] \right\} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M_2 \left[\frac{2}{\alpha} fu_n(x) \right] dx = 0.$$

Мы пришли к противоречию с (17.9).

Значит, оператор f непрерывен в нуле пространства $L_{M_1}^*$, если $f\theta = \theta$.

Перейдем к рассмотрению общего случая: без дополнительных предположений покажем, что оператор f непрерывен в любой точке $u_0(x)$ множества $\Pi(E_M, r)$. Пусть $d = d(u_0, E_M)$. Очевидно, $d < r$. Непрерывность оператора f в точке $u_0(x)$ равносильна непрерывности в нуле пространства $L_{M_1}^*$ оператора

$$f_1 u(x) = f[u_0(x) + u(x)] - fu_0(x).$$

Оператор f_1 действует из шара $T(\theta, r - d; L_{M_1}^*)$ в E_{M_2} . В силу теоремы 17.2 он действует из $\Pi(E_M, r - d)$ в E_{M_2} . Так как $f_1 \theta = \theta$, то, по уже доказанному, оператор f_1 непрерывен в нуле $L_{M_1}^*$.

Теорема доказана.

Отметим, что теорема 17.3 дает грубый признак непрерывности оператора f . Из нее не следует, например, даже непрерывность оператора тождественного преобразования (оператора $fu(x) = u(x)$) в пространствах L_M^* , если $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию.

Если в условиях теоремы 17.3 N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то эта теорема означает, что оператор f непрерывен, если он действует в пространство $L_{M_2}^* = L_{M_2} = E_{M_2}$. Возникает вопрос о том, всегда ли оператор f непрерывен, если он действует из $\Pi(E_M, r)$ в пространство $L_{M_2}^*$, когда $M_2(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Оказывается, что оператор f непрерывен не всегда. Приведем пример. Пусть

$$fu(x) = M_2^{-1}\{M_1[u(x)]\}, \quad (17.10)$$

где $M_1(u)$ удовлетворяет, а $M_2(u)$ — не удовлетворяет Δ_2 -условию. Очевидно, оператор f действует из $\Pi(E_M, 1) = L_{M_1}$ в L_{M_2} . Пусть $v(x)$ принадлежит L_{M_2} , но не принадлежит E_{M_2} . Тогда в силу леммы 10.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_{M_2} = d(v, E_{M_2}) = d > 0, \quad (17.11)$$

где

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если } |v(x)| \leq n, \\ 0, & \text{если } |v(x)| > n. \end{cases} \quad (17.12)$$

Функции

$$u_n(x) = M_1^{-1}\{M_2[v(x) - v_n(x)]\}$$

принадлежат L_{M_1} , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M_1 [u_n(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G M_2 [v(x) - v_n(x)] dx = 0.$$

Так как в L_{M_1} сходимость в среднем влечет за собой сходимость по норме, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{M_1} = 0.$$

Из этого равенства и (17.11) вытекает, что оператор f в нуле пространства $L_{M_1}^*$ разрывен, так как $fu_n(x) = v(x) - v_n(x)$.

4. Ограниченность оператора f . Ограниченность множества значений оператора f на шаре пространства $L_{M_1}^*$ может быть доказана при меньших ограничениях, чем те, при которых была доказана непрерывность оператора f в теореме 17.3.

Теорема 17.4. Пусть оператор f действует из шара $T(\theta, r, L_{M_1}^*)$ в класс L_{M_2} .

Тогда f ограничен на любом шаре $T(\theta, r_1, L_{M_1}^*)$ ($r_1 < r$):

$$\sup_{\|u\|_{M_1} < r_1} \|fu\|_{M_2} < \infty.$$

Доказательство. Оператор $\frac{fu(x) - f\theta}{2}$ в силу леммы 17.1 действует из $\Pi(E_{M_1}, r)$ в класс L_{M_2} . Поэтому оператор

$$gv(x) = M_2 \left\{ \frac{1}{2} f(r_1 M_1^{-1} [v(x)]) - \frac{1}{2} f\theta \right\}$$

действует из L в L .

Для функций $u(x) \in T(\theta, r_1; L_{M_1}^*)$

$$\int_G M_1 \left[\frac{u(x)}{r_1} \right] dx \leq 1.$$

В силу леммы 17.2

$$\sup_{\|u\|_{M_1} < r_1} \int_G g \left\{ M_1 \left[\frac{u(x)}{r_1} \right] \right\} dx < \infty,$$

т. е.

$$\sup_{\|u\|_{M_1} < r_1} \int_G M_2 \left[\frac{1}{2} fu(x) - \frac{1}{2} f\theta \right] dx < \infty.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\|u\|_{M_1} < r_1} \|fu\|_{M_2} &\leq \|f\theta\|_{M_2} + \sup_{\|u\|_{M_1} < r_1} \|fu - f\theta\|_{M_2} \leq \\ &\leq \|f\theta\|_{M_2} + 2 \left(1 + \sup_{\|u\|_{M_1} < r_1} \int_G M_2 \left[\frac{1}{2} fu(x) - \frac{1}{2} f\theta \right] dx \right) < \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Возникает вопрос о том, ограничен ли оператор f на шарах больших радиусов. Оказывается, что необязательно. В качестве примера рассмотрим снова оператор (17.10), причем будем предполагать, что $M_1(u)$ не удовлетворяет, а $M_2(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Оператор (17.10) действует из класса L_{M_1} в $L_{M_2} = E_{M_2}$ и в силу теоремы 17.3 непрерывен на E_{M_1} . Покажем, что значения этого оператора f не ограничены на каждом шаре $T(\theta, 1 + \varepsilon, E_{M_1})$, где ε — произвольное положительное число. Так как $M_2(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то ограниченность по норме эквивалентна ограниченности в среднем. Поэтому достаточно показать, что существует такая последовательность функций $u_n(x) \in T(\theta, 1 + \varepsilon; E_{M_1})$, что

$$\begin{aligned} \sup_{\|u_n\|_{M_1} < 1 + \varepsilon} \int_G M_2[fu_n(x)] dx &= \\ &= \sup_{\|u_n\|_{M_1} < 1 + \varepsilon} \int_G M_1[u_n(x)] dx = \infty. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Функции $u_n(x)$ определим равенствами (17.12), где $u(x)$ — такая функция, не принадлежащая L_{M_1} , что $\|u\|_{M_1} < 1 + \varepsilon$. Существование функции $u(x)$ вытекает из теоремы 10.1. Если бы для функций $u_n(x)$ соотношение (17.13) не выполнялось, то в силу теоремы Фату (см. стр. 88) функция $u(x)$ принадлежала бы L_{M_1} .

5. Общий вид оператора f .

Теорема 17.5. Оператор f действует из класса L_{M_1} в класс L_{M_2} в том и только том случае, если

$$M_2[f(x, u)] \leq a(x) + bM_1(u) \quad (x \in G, -\infty < u < \infty), \quad (17.14)$$

где $a(x) \in L$, $b \geq 0$.

Доказательство. Если f действует из L_{M_1} в L_{M_2} , то оператор

$$g v(x) = M_2 \{ f(M_1^{-1} [v(x)]) \}$$

действует из L в L и в силу леммы 17.2

$$M_2 \{ f[x, M_1^{-1}(v)] \} \leq a(x) + b|v|.$$

Полагая в этом неравенстве $v = M(u)$, получим (17.14). Достаточность условия (17.14) очевидна.

Теорема доказана.

Допустим, что выполнено условие (17.14). Тогда в силу (1.20)

$$|f(x, u)| \leq c(x) + b_1 M_2^{-1} [M_1(u)] \quad (x \in G, -\infty < u < \infty), \quad (17.15)$$

где $c(x) = M_2^{-1} [a(x)] \in L_{M_2}$. Таким образом, условие (17.15) необходимо для того, чтобы оператор f действовал из L_{M_1} в L_{M_2} . В случае, если N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, условие (17.15) одновременно является и достаточным условием, так как в этом случае из (17.15) вытекает (17.14).

6. Достаточные условия непрерывности и ограниченности оператора f . Из доказанных выше утверждений вытекает

Теорема 17.6. Пусть функция $f(x, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, u)| \leq c(x) + b_1 M_2^{-1} \left[M_1 \left(\frac{u}{r} \right) \right] \quad (x \in G, -\infty < u < \infty), \quad (17.16)$$

где $c(x) \in L_{M_2}$, $b_1 \geq 0$, причем N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Тогда оператор f действует из $\Pi(E_{M_1}, r)$ в пространство $L_{M_2}^* = E_{M_2}$, непрерывен во всех точках $\Pi(E_{M_1}, r)$ и ограничен на каждом шаре $T(\theta, r_1; L_{M_1}^*)$ ($r_1 < r$).

Если N -функция $M_2(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то для непрерывности оператора f приходится требовать, чтобы множество его значений принадлежало E_{M_2} . Поэтому на функцию $f(x, u)$ приходится накладывать более жесткие ограничения.

Теорема 17.7. Пусть функция $f(x, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, u)| \leq b(x) + aQ^{-1} \left\{ M_2^{-1} \left[M_1 \left(\frac{u}{r} \right) \right] \right\} \quad (17.17)$$

$$(x \in G, -\infty < u < \infty),$$

где $b(x) \in E_{M_2}$, $Q(u)$ — некоторая N -функция, a, r — положительные числа.

Тогда оператор f действует из $\Pi(E_{M_1}, r)$ в E_{M_2} , непрерывен во всех точках $\Pi(E_{M_1}, r)$ и ограничен на каждом шаре $T(\theta, r_1; L_{M_1}^*)$ ($r_1 < r$).

7. Оператор f и E_N -слабая сходимость. Непрерывность оператора f была нами доказана в предположении, что он действует из шара $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ в E_{M_2} . Ограниченность оператора f была установлена при более слабых предположениях. Покажем, что при этих более слабых предположениях может быть доказана непрерывность оператора f в некотором ослабленном смысле.

Теорема 17.8. Пусть оператор f действует из шара $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ в класс L_{M_2} . Тогда этот оператор любую последовательность $u_n(x) \in T(\theta, r; L_{M_1}^*)$, сходящуюся по норме пространства $L_{M_1}^*$ к внутренней точке $u_0(x)$ этого шара, преобразует в последовательность функций $fu_n(x)$, E_{N_2} -слабо сходящуюся в пространстве $L_{M_2}^*$ к функции $fu_0(x)$.

Доказательство. Так как функции $u_n(x)$ сходятся к функции $u_0(x)$ по норме, то они сходятся к этой функции и по мере. Поэтому последовательность функций $fu_n(x)$ также сходится по мере к функции $fu_0(x)$. Так как функция $u_0(x)$ есть внутренняя точка шара $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$, то без ограничения общности можно считать, что все $u_n(x) \in T(\theta, r_1; L_{M_1}^*)$, где $r_1 < r$. Из теоремы 17.4 следует, что нормы функций $fu_n(x)$ ограничены в совокупности. В силу теоремы 14.6 эта последовательность E_{N_2} -слабо сходится к функции $fu_0(x)$.

Теорема доказана.

§ 18. Дифференцируемость. Градиент нормы

1. Дифференцируемые функционалы. Мы будем рассматривать вещественные функционалы, заданные на пространствах Орлича L_M^* (или на части этих пространств).

Говорят, что функционал $F(u)$ дифференцируем в точке $u_0(x)$, являющейся внутренней точкой области определения этого функционала, если приращение функционала может быть записано в виде

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = l_{u_0}(h) + \omega(u_0, h), \quad (18.1)$$

где $l_{u_0}(h)$ — линейный функционал на L_M^* , а остаток $\omega(u_0, h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\|_M \rightarrow 0} \frac{\omega(u_0, h)}{\|h\|_M} = 0. \quad (18.2)$$

Функционал $F(u)$ дифференцируем на множестве \mathfrak{M} , если он дифференцируем в каждой точке \mathfrak{M} .

Оператор Γ , относящий элементу $u_0(x) \in \mathfrak{M}$ функционал l_{u_0} , называют *градиентом* функционала $F(u)$. Градиент действует из пространства L_M^* в сопряженное пространство. Пространство L_N^* , где $N(v)$ — функция, дополнительная к $M(u)$, можно рассматривать как часть сопряженного пространства. В случае, если градиент действует в L_N^* , равенство (18.1) можно переписать в виде

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = (\Gamma u_0, h) + \omega(u_0, h), \quad (18.3)$$

где символом (w, h) , как обычно, обозначено скалярное произведение

$$(w, h) = \int_G w(x) h(x) dx \quad (w(x) \in L_N^*, \quad h(x) \in L_M^*).$$

Название градиента сохраним за оператором, относящим функции $u_0(x)$ функцию $\Gamma u_0(x)$.

2. Измеримость функции $\theta(x)$. Пусть функция $F(x, u)$ ($x \in G$, $-\infty < u < \infty$) удовлетворяет условиям Каратеодори и имеет непрерывную по u производную $F'_u(x, u)$. Очевидно, функция $F'_u(x, u)$ также удовлетворяет условиям Каратеодори.

Пусть $u(x)$ — некоторая измеримая на G функция. Из формулы конечных приращений вытекает существование такой функции $\theta(x)$, что

$$F(x, u(x)) - F(x, 0) = u(x) F'_u(x, \theta(x) u(x)). \quad (18.4)$$

Функция $\theta(x)$, вообще говоря, определяется неоднозначно. Ниже будет использовано следующее утверждение:

Лемма 18.1. Существует измеримая функция $\theta(x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$0 \leq \theta(x) \leq 1, \quad (18.5)$$

при которой выполняется равенство (17.21).

Доказательство. Функцию $\theta(x)$ определим при каждом $x \in G$ как минимум тех $\theta \in [0, 1]$, при которых выполняется равенство

$$F(x, u(x)) - F(x, 0) = u(x) F'_u(x, \theta u(x)).$$

Этот минимум существует, так как $F'_u(x, u)$ непрерывна по u .

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу C -свойства Н. Н. Лузина и теоремы 17.1 можно указать такое множество $G_1 \subset G$, что $m_\varepsilon(G \setminus G_1) < \varepsilon$ и функции $F'_u(x, u)$, $F(x, 0)$, $F(x, u)$ и $u(x)$ при $x \in G_1$, $-\infty < u < \infty$ непрерывны по совокупности переменных. Так как ε произвольно, то достаточно доказать измеримость функции $\theta(x)$ на G_1 .

Пусть $x_0 \in G_1$, $x_n \in G_1$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n) = \theta_0.$$

Переходя к пределу в равенстве

$$F(x_n, u(x_n)) - F(x_n, 0) = u(x_n) F'_u(x_n, \theta(x_n) u(x_n)),$$

получим:

$$F(x_0, u(x_0)) - F(x_0, 0) = u(x_0) F'_u(x_0, \theta_0 u(x_0)).$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\theta(x_0) \leq \theta_0.$$

Значит, функция $\theta(x)$ на G_1 полунепрерывна снизу и, следовательно, измерима.

Лемма доказана.

3. Функционал для оператора f . Рассмотрим функционал

$$F_1(u) = \int_G dx \int_0^{u(x)} f(x, s) ds. \quad (18.6)$$

Нас будет интересовать случай, когда функционал $F_1(u)$ определен на части пространства L_M^* , являющегося частью пространства L^2 . В этом случае N -функция $M(u)$ и дополнительная к ней функция $N(v)$ связаны соотношениями $N(u) \rightarrow u^2 \rightarrow M(u)$. Так как $N(u)$ растет не быстрее u^2 , то в основных случаях она будет удовлетворять Δ_2 -условию. При этом предположении и доказывается следующая

Теорема 18.1. Пусть оператор f действует из $\Pi(E_M, r)$ в пространство $L_N^* = L_N$. Тогда функционал (18.6) определен и дифференцируем на $\Pi(E_M, r)$, причем его градиентом является оператор f .

Доказательство. Пусть $u(x) \in \Pi(E_M, r)$. В силу леммы 18.1 найдется такая измеримая функция $\theta(x)$, удовлетворяющая условию (18.5), что

$$F_1(u) = \int_G dx \int_0^{u(x)} f(x, s) ds = \int_G f[x, \theta(x)u(x)] u(x) dx.$$

Очевидно, $\theta(x)u(x) \in \Pi(E_M, r)$. Поэтому $f[x, \theta(x)u(x)] \in L_N$. Следовательно,

$$|F_1(u)| \leq \|f\theta u\|_N \|u\|_M < \infty,$$

откуда следует, что функционал $F_1(u)$ определен на $\Pi(E_M, r)$.

В силу той же леммы 18.1 каждой функции $h(x) \in L_M^*$ такой, что $\|h\|_M < r - d(u, E_M)$, соответствует такая измеримая функция $\theta_h(x)$, удовлетворяющая условию (18.5), что

$$\begin{aligned} |F_1(u+h) - F_1(u) - (fu, h)| &= \\ &= \left| \int_G [f(x, u(x) + \theta_h(x)h(x)) - f(x, u(x))] h(x) dx \right| \leq \\ &\leq \|f(u + \theta_h h) - fu\|_N \|h\|_M. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и непрерывности f (теорема 17.3) следует, что f является градиентом функционала $F_1(u)$.

Теорема доказана.

4. **Линейный оператор f .** Одним из простейших видов операторов f является линейный оператор f :

$$fu(x) = a(x)u(x), \quad (18.7)$$

где $a(x)$ — некоторая фиксированная функция. Этот оператор, по существу, был уже нами изучен в § 13 (пункты 4 и 5).

Если функция $a(x)$ ограничена, то, очевидно, оператор f преобразует каждое пространство Орлича в себя и является непрерывным оператором.

Из теорем 13.7 и 13.8 и из неравенств (13.19) и (13.27) вытекает следующее утверждение:

Теорема 18.2. Пусть $a(x) \in L_\Phi^*$. Для того чтобы оператор (18.7) действовал из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$ и был непрерывен, достаточно, чтобы существовали такие дополнительные друг к другу N -функции $R(u)$ и $Q(u)$, что при больших значениях аргумента

$$R(u) < M_2^{-1}[M_1(\alpha u)], \quad Q(u) < M_2^{-1}[\Phi(\alpha u)] \quad (18.8)$$

или, если N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ' -условию,

$$R(u) < M_1[M_2^{-1}(\alpha u)] \quad Q(u) < \Phi[M_2^{-1}(\alpha u)]. \quad (18.9)$$

При этих условиях

$$\| \alpha u \|_{M_2} \leq k \| a \|_\Phi \| u \|_{M_1},$$

где постоянная k не зависит от функции $u(x)$.

В условиях этой теоремы α — некоторое положительное число.

5. **Производная Фреше.** Пусть нелинейный оператор A действует из банахова пространства E в банахово пространство E_1 . Говорят, что линейный оператор B является производной Фреше оператора A в точке $u_0 \in E$, если

$$A(u_0 + h) - Au_0 = Bh + \omega(u_0, h),$$

где

$$\lim_{\|h\|_E \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u_0, h)\|_{E_1}}{\|h\|_E} = 0.$$

Линейный оператор B при этом также действует из пространства E в пространство E_1 .

Выражение Bh называют дифференциалом Фреше.

Операторы, имеющие производную Фреше, называются *дифференцируемыми*. Если оператор дифференцируем на некотором множестве, то он, очевидно, на этом множестве непрерывен.

Теорема 18.3. Пусть функция $f(x, u)$ вместе со своей непрерывной по u производной $f'_u(x, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть оператор \mathbf{f} действует из некоторого шара $T(u_0, r; L_{M_1}^*)$ в пространство $L_{M_2}^*$, а оператор

$$\mathbf{f}_1 u(x) = f'_u(x, u(x)) \quad (18.10)$$

действует из шара $T(u_0, r; L_{M_1}^*)$ в пространство L_{Φ}^* и непрерывен. Пусть, наконец, функции $M_1(u)$, $M_2(u)$ и $\Phi(u)$ удовлетворяют одному из условий (18.8) или (18.9).

Тогда оператор \mathbf{f} в каждой внутренней точке шара $T(u_0, r; L_{M_1}^*)$ дифференцируем по Фреше, причем его дифференциал Фреше $\mathbf{V}h$ в точке $u(x) \in T$ определяется равенством

$$\mathbf{V}h(x) = \mathbf{f}_1 u(x) h(x) \quad (h(x) \in L_{M_1}^*).$$

Доказательство. В силу формулы конечных приращений

$$\begin{aligned} f[x, u(x) + h(x)] - f[x, u(x)] - f'_u[x, u(x)] h(x) &= \\ = \{ f'_u[x, u(x) + \theta_h(x) h(x)] - f'_u[x, u(x)] \} h(x), \end{aligned} \quad (18.11)$$

где $0 \leq \theta_h(x) \leq 1$, причем функцию $\theta_h(x)$ в силу леммы 18.1 можно считать измеримой.

Пусть $h(x) \in L_{M_1}^*$ и $\|h\|_{M_1}$ достаточно мала. Тогда функции $u(x) + h(x)$ и $u(x) + \theta_h(x) h(x)$ принадлежат шару $T(u_0, r; L_{M_1}^*)$. В силу теоремы 18.2 $f'_u[x, u(x)] h(x)$ и вся правая часть равенства (18.11) принадлежат пространству $L_{M_2}^*$. Из этой же теоремы вытекает, что

$$\|f(u + h) - fu - \mathbf{f}_1 u \cdot h\|_{M_2} \leq k \|f_1(u + \theta_h h) - \mathbf{f}_1 u\|_{\Phi} \|h\|_{M_1}.$$

Отсюда, в силу непрерывности оператора \mathbf{f}_1 , следует, что

$$\lim_{\|h\|_{M_1} \rightarrow 0} \frac{\|f(u + h) - fu - \mathbf{f}_1 u \cdot h\|_{M_2}}{\|h\|_{M_1}} = 0.$$

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим оператор

$$\mathbf{f}u(x) = e^{u(x)}.$$

Из теоремы 17.6 вытекает, что оператор \mathbf{f} действует из шара $T\left(\theta, \frac{1}{2}; L_{M_1}^*\right)$, где $M_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, в $L_{M_2}^* = L^2$. В силу теорем 17.2 и 17.3 он действует из $\Pi\left(E_{M_1}, \frac{1}{2}\right)$ в L^2 и непрерывен.

Покажем, что этот оператор дифференцируем и его дифференциал Фреше $\mathbf{V}h(x) = \mathbf{f}_1 u(x) h(x)$ в точке $u(x) \in \Pi\left(E_{M_1}, \frac{1}{2}\right)$ имеет вид

$$\mathbf{V}h(x) = e^{u(x)} h(x).$$

Применим теорему 18.3, считая, что $\Phi(u) = |u|^{2+\beta}$, где

$$0 < \beta < \frac{1}{d(u, E_{M_1})} - 2.$$

В качестве T рассмотрим шар с центром в точке $u(x)$ и радиусом $r = \frac{1}{2+\beta} - d(u, E_{M_1})$.

Оператор \mathbf{f} действует из шара T в L^2 , так как шар $T \subset \Pi\left(E_{M_1}, \frac{1}{2}\right)$. Оператор $\mathbf{f}_1 u(x) = e^{u(x)}$ действует из шара $T\left(\theta, \frac{1}{2+\beta}; L_{M_1}^*\right)$ в $L_\Phi^* = L^{2+\beta}$. Из теорем 17.2 и 17.3 вытекает, что он действует из $\Pi\left(E_{M_1}, \frac{1}{2+\beta}\right)$ и, в частности, из шара T в $L_\Phi^* = L^{2+\beta}$ и непрерывен.

Для завершения доказательства достаточно проверить, что условие (18.8) выполняется, если положить $R(u) = M_1(u)$, $Q(u) = N_1(u)$.

В качестве второго примера рассмотрим операторы

$$\mathbf{f}u(x) = \sin u(x), \quad \mathbf{f}_1 u(x) = \cos u(x).$$

Эти операторы действуют из любого пространства Орлича $L_{M_1}^*$ в каждое множество E_{M_2} и, следовательно, принадлежат $\{L_{M_1}^* \rightarrow L_{M_2}^*; \text{н.}\}$. Пусть $L_{M_1}^* \subset L_{M_2}^*$. Тогда оператор $\mathbf{V}h(x) = \mathbf{f}_1 u(x) \cdot h(x)$ является дифференциалом Фреше оператора \mathbf{f} .

В приведенных примерах оператор f был дифференцируем в каждой точке некоторого шара T . Этим объясняется простота доказательства дифференцируемости. Нетрудно указать примеры операторов, дифференцируемых в одной точке пространства Орлича, но не дифференцируемых на множестве, для которого данная точка является предельной.

Пусть, например,

$$fu(x) = \sin(e^{u^2(x)} - 1). \quad (18.12)$$

Будем рассматривать f как оператор из $\{L^4 \rightarrow L^2\}$. В тех точках, в которых этот оператор дифференцируем, его дифференциал Фреше, очевидно, имеет вид

$$Bh(x) = 2u(x)e^{u^2(x)} \cos(e^{u^2(x)} - 1)h(x).$$

Ясно, что правая часть принадлежит пространству L^2 лишь при некоторых функциях $u(x)$: при $h(x) \equiv 1$ правая часть не принадлежит L^2 для всюду плотного в L^4 множества функций $u(x)$.

Ниже будет показано, что оператор (18.12) дифференцируем в нуле пространства L^4 .

6. Специальное условие дифференцируемости. В этом пункте указывается специальное условие дифференцируемости оператора f в одной точке пространства Орлича. Мы ограничимся условиями дифференцируемости в нуле θ пространства, так как дифференцируемость оператора $gu(x) = g(x, u(x))$ в точке $u_0(x)$ эквивалентна дифференцируемости в нуле оператора $fu(x) = g[x, u_0(x) + u(x)]$.

Ниже рассматриваются функции $f(x, u)$ удовлетворяющие условию

А) Имеет место неравенство

$$|f(x, u) - f(x, 0) - f'_u(x, 0)u| \leq R(|u|) \quad (18.13)$$

$$(x \in G, -\infty < u < \infty),$$

где $R(u)$ — такая непрерывная, неубывающая функция, что $R(0) = R'(0) = 0$, причем существует такая N -функция $P(u)$, удовлетворяющая при всех значениях аргументов Δ' -условию

$$P(uv) \leq CP(u)P(v), \quad (18.14)$$

что при достаточно больших значениях $u_1 \gg u_0$, $u_2 \gg u_0$ из $u_1 < u_2$ вытекает

$$\frac{R(u_1)}{P(u_1)} < \mu \frac{R(\nu u_2)}{P(\nu u_2)}, \quad (18.15)$$

где μ, ν — положительные постоянные.

В качестве функции $P(u)$ наиболее удобно рассматривать функции $P(u) = |u|^r$ ($r > 1$). При таких функциях $P(u)$ условие (18.15) выполняется, если $R(u)$ является главной частью N -функции, удовлетворяющей Δ_3 -условию.

Действительно, в этом случае при больших значениях аргумента $u^r R(u) < R(\nu u)$, где ν — некоторая постоянная. Поэтому при больших значениях u_1 и u_2 из $u_1 < u_2$ вытекает, что

$$\frac{R(u_1)}{u_1^r} < R(u_1) < R(u_2) = \frac{u_2^r R(u_2)}{u_2^r} < \nu^r \frac{R(\nu u_2)}{(\nu u_2)^r}.$$

В доказываемой ниже теореме основное условие дифференцируемости оператора \mathbf{f} , рассматриваемого как оператор, действующий из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$, будет основано на неравенстве (18.13). Для того чтобы это неравенство могло гарантировать дифференцируемость оператора \mathbf{f} , очевидно, необходимо, чтобы

$$\lim_{\|h\|_{M_1} \rightarrow 0} \frac{\|R(|h(x)|)\|_{M_2}}{\|h\|_{M_1}} = 0.$$

Рассматривая в качестве функций $h(x)$ характеристические функции множеств со стремящейся к нулю мерой, мы приходим к условию

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{N_2^{-1}(v)}{N_1^{-1}(v)} = 0, \quad (18.16)$$

где $N_1(v)$ и $N_2(v)$ — функции, дополнительные к $M_1(u)$ и $M_2(u)$, так как для характеристической функции $x(x)$ множества G_1 ($\text{mes } G_1 = \frac{1}{v}$)

$$\frac{\|R(x)\|_{M_2}}{\|x\|_{M_1}} = R(1) \frac{N_2^{-1}(v)}{N_1^{-1}(v)}.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из (18.16) вытекает, что при больших значениях аргумента

$$N_2^{-1}(v) < \varepsilon N_1^{-1}(v).$$

Из этого неравенства в свою очередь следует, что N -функция $N_2(v)$ растет существенно быстрее N -функции $N_1(v)$. В силу леммы 13.1 N -функция $M_1(u)$ растет существенно быстрее, чем $M_2(u)$, т. е. каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при больших значениях аргумента выполняется неравенство

$$M_2(u) < M_1(\varepsilon u).$$

Для того чтобы выполнялось это неравенство, достаточно, чтобы функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ были связаны соотношением

$$M_2[Q(u)] \leq M_1(u) \quad (u \geq u_0), \quad (18.17)$$

где $Q(u)$ — некоторая N -функция.

Мы в дальнейшем будем предполагать, что условие (18.17) выполняется. При этом в силу теоремы 13.3 найдется такая постоянная $q > 0$, что

$$\|u\|_{M_2} \leq q \|u\|_{M_1} \quad (u(x) \in L_{M_1}^*). \quad (18.18)$$

Рассмотрим еще условие

Б) Оператор

$$f_1 h(x) = f'_u(x, 0) h(x)$$

действует из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$ и непрерывен.

Заметим, что условие Б) в силу (18.17) всегда выполняется, если функция $a(x) = f'_u(x, 0)$ ограничена. Если функция $a(x)$ не ограничена, то для выполнения условия Б) достаточно, чтобы функция $a(x)$ принадлежала пространству L_{Φ}^* , где $\Phi(u)$ удовлетворяет одному из условий теоремы 18.2.

Теорема 18.4. Пусть выполнены условия А), (18.17) и Б). Пусть

$$R(u) \leq b + a M_2^{-1}[M_1(ku)] \quad (0 \leq u < \infty), \quad (18.19)$$

где $a, b, k > 0$. Пусть $f(x, 0) \in L_{M_2}^*$.

Тогда оператор f действует из некоторой окрестности нуля θ пространства $L_{M_1}^*$ в пространство $L_{M_2}^*$ и имеет

в точке θ дифференциал Фреше

$$\mathbf{B}h(x) = \mathbf{f}_1 h(x) = f'_u(x, 0) h(x).$$

Доказательство. В силу (18.13) и (18.19)

$$|f(x, u)| \leq |f(x, 0)| + |a(x)u| + b + aM_2^{-1} [M_1(ku)] \quad (-\infty < u < \infty).$$

По условию $f(x, 0) \in L_{M_2}^*$. В силу Б) $a(x)u(x) \in L_{M_2}^*$ для каждой $u(x) \in L_{M_1}^*$. Если $\|u\|_{M_1} \leq \frac{1}{k}$, то $R(|u(x)|) \in L_{M_2}^*$, причем

$$\begin{aligned} \|R(|u(x)|)\|_{M_2} &= 2a \left\| \frac{1}{2a} R(|u(x)|) \right\|_{M_2} \leq \\ &\leq 2a \left\{ 1 + \int_G M_2 \left[\frac{1}{2a} R(|u(x)|) \right] dx \right\} \leq \\ &\leq 2a + aM_2 \left(\frac{b}{a} \right) \text{mes } G + a \int_G M_1 [ku(x)] dx \leq \\ &\leq 3a + aM_2 \left(\frac{b}{a} \right) \text{mes } G = \beta. \end{aligned} \quad (18.20)$$

Следовательно, оператор \mathbf{f} действует из шара $T\left(\theta, \frac{1}{k}; L_{M_1}^*\right)$ в пространство $L_{M_2}^*$.

Для доказательства дифференцируемости оператора \mathbf{f} в точке θ нужно показать, что

$$\lim_{\|u\|_{M_1} \rightarrow 0} \frac{\|R(|u(x)|)\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} = 0. \quad (18.21)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $R'(0) = 0$, то можно указать такое $c_1 > 0$, что при $|u| < c_1$

$$R(|u|) \leq \varepsilon |u|. \quad (18.22)$$

Каждой функции $u(x) \in L_M^*$ отнесем функцию $\tilde{u}(x)$, определенную равенством

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } |u(x)| \leq c_1, \\ 0, & \text{если } |u(x)| > c_1. \end{cases}$$

В силу (18.22) и (18.18)

$$\|R(|\tilde{u}(x)|)\|_{M_2} \leq \varepsilon \|\tilde{u}\|_{M_2} \leq \varepsilon \|u\|_{M_2} \leq \varepsilon q \|u\|_{M_1}. \quad (18.23)$$

Без ограничения общности можно считать постоянную u_0 , фигурирующую в условии А), больше c_1 . Из условия А) следует, что при $u \geq c_1$ и $\gamma \leq \frac{c_1}{u_0^\nu}$

$$R(u) \leq R\left(\frac{u_0}{c_1} u\right) \leq \mu \frac{R\left(\frac{u}{\gamma}\right)}{P\left(\frac{u}{\gamma}\right)} P\left(\frac{u_0}{c_1} u\right)$$

и в силу (18.14)

$$R(u) \leq C\mu R\left(\frac{u}{\gamma}\right) P\left(\frac{u_0\gamma}{c_1}\right). \quad (18.24)$$

Пусть $\|u\|_{M_1} < \frac{c_1}{u_0^\nu k}$. Положим в (18.24) $\gamma = k\|u\|_{M_1}$. Тогда

$$R(|u(x) - \tilde{u}(x)|) \leq C\mu R\left(\frac{|u(x) - \tilde{u}(x)|}{k\|u\|_{M_1}}\right) P\left(\frac{ku_0\|u\|_{M_1}}{c_1}\right),$$

откуда в силу (18.20)

$$\|R(u - \tilde{u})\|_{M_2} \leq C\mu\beta P\left(\frac{ku_0\|u\|_{M_1}}{c_1}\right),$$

и так как $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{P(u)}{u} = 0$, то

$$\lim_{\|u\|_{M_1} \rightarrow 0} \frac{\|R(u - \tilde{u})\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} = 0.$$

Из этого соотношения и (18.23) вытекает, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\|u\|_{M_1} \rightarrow 0} \frac{\|R(u)\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} &\leq \overline{\lim}_{\|u\|_{M_1} \rightarrow 0} \frac{\|R(\tilde{u})\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} + \\ &+ \lim_{\|u\|_{M_1} \rightarrow 0} \frac{\|R(u - \tilde{u})\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} \leq \varepsilon q. \end{aligned}$$

Так как ε произвольно, то справедливо равенство (18.21).

Теорема доказана.

Рассмотрим в качестве примера оператор (18.12) как оператор из $\{L^4 \rightarrow L^2\}$.

Функция $f(x, u) = \sin(e^{u^2} - 1)$ удовлетворяет неравенству (18.13) с функцией $R(u) = eu^2$. Поэтому выполнено условие А), в котором можно положить $P(u) = u^2$. Так как $M_1(u) = u^4$, а $M_2(u) = u^2$, то выполнено условие (18.17) с функцией $Q(u) = u^2$. Наконец, выполнено условие Б) так как в рассматриваемом случае $f'_u(x, 0) \equiv 0$. Справедливость условия (18.19) очевидна.

Таким образом, из теоремы 18.4 вытекает, что оператор (18.12) из $\{L^4 \rightarrow L^2\}$ дифференцируем в нуле θ пространства L^4 .

7. Вспомогательная лемма. Нам понадобится оператор, определенный функцией $p(u)$ — производной N -функции $M(u)$.

Лемма 18.2. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — взаимно дополнителные N -функции, вторая из которых удовлетворяет Δ_2 -условию. Пусть производная $p(u)$ функции $M(u)$ непрерывна.

Тогда оператор p , определенный равенством $pu(x) = p(|u(x)|)$, действует из $\Pi(E_M, 1)$ в $L_N^ = L_N$ и непрерывен.*

Доказательство. В силу леммы 9.1 оператор p действует из $T(\theta, 1; L_M^*)$ в L_N . Из теоремы 17.2 тогда вытекает, что оператор p действует из $\Pi(E_M, 1)$ (и, тем самым, из E_M) в L_N . Непрерывность оператора p вытекает из теоремы 17.3.

Лемма доказана.

8. Градиент Гато. Будем говорить, что функционал $F(u)$, определенный на банаховом пространстве E , дифференцируем по Гато в точке $u \in E$, если при любом $h \in E$ функция $F(u + th)$ дифференцируема по t и производная этой функции при $t = 0$ имеет вид

$$\left. \frac{d}{dt} F(u + th) \right|_{t=0} = (v, h),$$

где элемент v из сопряженного E пространства \bar{E} не зависит от h . Элемент v будем называть *градиентом Гато* функционала $F(u)$ в точке u . Оператор Γ , определенный формулой $\Gamma u = v$ на всех элементах, в которых $F(u)$ дифференцируем по Гато, также будем называть *градиентом Гато*. Очевидно, градиент Гато действует из E в сопряжен-

ное пространство \bar{E} . Имеет место следующее утверждение (см., например, [5a]):

Лемма 18.3. Пусть функционал $F(u)$ дифференцируем по Гато на некотором шаре T пространства E и его градиент Гато является непрерывным оператором. Тогда функционал $F(u)$ дифференцируем в обычном смысле и его градиент (см. пункт 1) совпадает с градиентом Гато.

Доказательство. Пусть $u \in T$, $u + h \in T$. По определению

$$\frac{d}{dt} F(u + th) = (\Gamma(u + th), h) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Интегрируя это равенство, получаем:

$$F(u + h) - F(u) = \int_0^1 (\Gamma(u + th), h) dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |F(u + h) - F(u) - (\Gamma u, h)| &= \left| \int_0^1 (\Gamma(u + th) - \Gamma u, h) dt \right| \leq \\ &\leq \|h\|_E \int_0^1 \|\Gamma(u + th) - \Gamma u\|_{\bar{E}} dt. \end{aligned}$$

Из непрерывности оператора Γ вытекает, что

$$\lim_{\|h\|_E \rightarrow 0} \frac{|F(u + h) - F(u) - (\Gamma u, h)|}{\|h\|_E} = 0.$$

Лемма доказана.

9. Градиент нормы Люксембурга. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — дополнительные друг к другу N -функции, вторая из которых удовлетворяет Δ_2 -условию. Всюду ниже предполагается, что функция $p(u) = M'(u)$ непрерывна. Нам будет удобно рассматривать функцию $p(u)$ и при отрицательных значениях аргумента. Очевидно, $p(-u) = -p(u)$.

Пусть $u(x), h(x) \in E_M$. Тогда при всех t и $k \neq 0$ определена функция

$$\varphi(t, k) = \int_G M \left[\frac{u(x) + th(x)}{k} \right] dx. \quad (18.25)$$

Легко видеть, что *)

$$\frac{\partial \varphi(t, k)}{\partial t} = \frac{1}{k} \int_G p \left[\frac{u(x) + th(x)}{k} \right] h(x) dx \quad (18.26)$$

и

$$\frac{\partial \varphi(t, k)}{\partial k} = - \frac{1}{k^2} \int_G p \left[\frac{u(x) + th(x)}{k} \right] [u(x) + th(x)] dx. \quad (18.27)$$

В силу леммы 18.2 каждая из найденных производных непрерывна по совокупности переменных.

Пусть $u(x) \in L_M^*$ такая функция, для которой

$$\int_G M \left[\frac{u(x)}{k} \right] dx = 1 \quad (18.28)$$

при некотором $k > 0$. Напомним (см. стр. 96), что число k в этом случае совпадает с нормой Люксембурга:

$$k = \|u\|_{(M)}.$$

Очевидно, норма Люксембурга может быть определена при помощи равенства (18.28) для всех функций $u(x) \in E_M$ ($\|u\|_{(M)} \neq 0$). Это следует из того, что интеграл, стоящий в левой части равенства (18.28), конечен при всех $k \neq 0$, непрерывно зависит от k и

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_G M \left[\frac{u(x)}{k} \right] dx = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_G M \left[\frac{u(x)}{k} \right] dx = 0.$$

Теорема 18.5. Норма Люксембурга является дифференцируемым функционалом в E_M . Градиент Γ нормы Люксембурга определяется формулой

$$\Gamma u(x) = \frac{p \left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} \right)}{\int_G p \left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} \right) \frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} dx} \quad (u(x) \in E_M). \quad (18.29)$$

*) Законность дифференцирования под знаком интеграла здесь в дальнейшем доказывается стандартными рассуждениями.

Доказательство. Найдем вначале градиент Гато нормы Люксембурга. Для этого рассмотрим равенство

$$\int_G M \left[\frac{u(x) + th(x)}{k} \right] dx = 1 \quad (u(x), h(x) \in E_M). \quad (18.30)$$

Это равенство определяет k как неявную функцию t . Так как частные производные (18.26) и (18.27) левой части уравнения (18.30) непрерывны и

$$\frac{\partial \varphi(0, k)}{\partial k} = -\frac{1}{k^2} \int_G p \left(\frac{|u(x)|}{k} \right) |u(x)| dx < 0 \quad (\|u\|_{(M)} \neq 0),$$

то по теореме о неявных функциях (см., например, [56])

$$\frac{dk(0)}{dt} = (v, h),$$

где

$$v = \frac{p \left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} \right)}{\int_G p \left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} \right) \frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} dx}.$$

Мы показали, что формула (18.29) определяет градиент Гато. Так как из леммы 18.2 вытекает, что этот градиент Гато является непрерывным оператором, то в силу леммы 18.3 он является обычным градиентом.

Теорема доказана.

10. Градиент нормы Орлича. Рассматриваемые в этом пункте N -функции $M(u)$ и $N(v)$ удовлетворяют тем же ограничениям, что и в предыдущем пункте. В силу леммы 18.2 для каждой функции $u(x) \in E_M$ функция

$$J(k) = \int_G N [p(k|u(x)|)] dx$$

определена при всех значениях k и непрерывна. Так как $J(0) = 0$, $J(\infty) = \infty$, то найдется такое k^* , что $J(k^*) = 1$. В силу теоремы 10.4 это означает, что норма Орлича может быть определена при помощи равенства

$$\|u\|_M = \int_G p(k^* |u(x)|) |u(x)| dx, \quad (18.31)$$

где

$$\int_G N [p(k^* | u(x) |)] dx = 1. \quad (18.32)$$

Нам будет удобно вместо формулы (18.32) пользоваться эквивалентным (см. (10.7)) равенством

$$k^* \int_G |u(x)| p(k^* | u(x) |) dx - \int_G M [k^* u(x)] dx = 1. \quad (18.33)$$

Как уже отмечалось, постоянная k^* , вообще говоря, определяется неоднозначно. В этом пункте предполагается, что $p(u)$ не имеет интервалов постоянства. Тогда, очевидно, k^* определяется однозначно. Легко проверить, что k^* есть непрерывный функционал на E_M .

Пусть $u(x), h(x) \in E_M$. Обозначим через $k(t)$ решение уравнения (18.33), соответствующее функции $u_t(x) = u(x) + th(x)$.

Лемма 18.4. Пусть функция $k(t)$ имеет производную $k'(t)$. Тогда норма Орлица является дифференцируемым функционалом на E_M . Градиент Γ нормы Орлица определяется формулой

$$\Gamma u(x) = p(k^* u(x)) \quad (u(x) \in E_M), \quad (18.34)$$

где k^* удовлетворяет уравнению (18.33).

Доказательство. Так как в силу леммы 18.2 и непрерывности функционала k^* оператор Γ , определенный формулой (18.34), является непрерывным оператором, действующим из E_M в L_N , то достаточно доказать, что Γ является градиентом Гато нормы Орлица.

В силу (18.31) и (18.32) норму Орлица для функции $u(x) \in E_M$ можно определить равенством

$$\|u\|_M = \frac{1}{k^*} \left(1 + \int_G M [k^* u(x)] dx \right),$$

где k^* удовлетворяет равенству (18.33). Пусть $h(x) \in E_M$. Рассмотрим функцию

$$F(u + th) = \frac{1}{k(t)} \left(1 + \int_G M [k(t) u_t(x)] dx \right),$$

где $u_t(x) = u(x) + th(x)$. В силу дифференцируемости функции $k(t)$ *)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(u + th) &= \\ &= \frac{1}{k^2(t)} \left\{ k(t) \int_G p[k(t) u_t(x)] [k'(t) u_t(x) - k(t) h(x)] dx - \right. \\ &\quad \left. - k'(t) \left(1 + \int_G M[k(t) u_t(x)] dx \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{k^2(t)} \left\{ k^2(t) \int_G p[k(t) u_t(x)] h(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + k'(t) \left[k(t) \int_G p[k(t) u_t(x)] u_t(x) dx - 1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_G M[k(t) u_t(x)] dx \right] \right\}, \end{aligned}$$

откуда в силу (18.33) $\frac{d}{dt} F(u + th) = \int_G p[k(t) u_t(x)] h(x) dx$.

Так как $k(0) = k^*$ и $u_t(x)|_{t=0} = u(x)$, то

$$\frac{d}{dt} F(u + th) \Big|_{t=0} = (v, h),$$

где $v = p(k^* u(x))$.

Лемма доказана.

Для применения этой леммы нужно знать, при каких условиях функция $k(t)$ дифференцируема.

Лемма 18.5. Пусть N -функция $M(u)$ имеет непрерывную вторую производную $p'(u)$, положительную при $u \neq 0$ и удовлетворяющую неравенству

$$|u p'(u)| \leq a + b p(c|u|) \quad (-\infty < u < \infty). \quad (18.35)$$

Тогда решение $k(t)$ уравнения (18.33), соответствующее функции $u_t(x) = u(x) + th(x)$, является дифференцируемой функцией.

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу (18.35) оператор $u(x) p'(u(x))$, как и оператор $p(u(x))$,

*) См. сноску на стр. 216.

действует из E_M (даже из $\Pi(E_M, 1)$) в L_N и является непрерывным оператором. Поэтому для любой пары функций $u(x)$, $h(x) \in E_M$ ($\|u\|_M \neq 0$) интегралы

$$\int_G u_t^2(x) p'[ku_t(x)] dx \quad \text{и} \quad \int_G u_t(x) h(x) p'[ku_t(x)] dx,$$

где $u_t(x) = u(x) + th(x)$, конечны при любых t и $k > 0$ и являются непрерывными функциями этих переменных. Отсюда и из леммы 18.2 вытекает, что функция

$$\chi(t, k) = k \int_G u_t(x) p[ku_t(x)] dx - \int_G M[ku_t(x)] dx$$

имеет непрерывные частные производные *)

$$\frac{\partial \chi(t, k)}{\partial t} = k^2 \int_G u_t(x) h(x) p'[ku_t(x)] dx$$

и

$$\frac{\partial \chi(t, k)}{\partial k} = k \int_G u_t^2(x) p'[ku_t(x)] dx.$$

Так как

$$\frac{\partial \chi(0, k)}{\partial k} = k \int_G u^2(x) p'[ku(x)] dx > 0,$$

то уравнение

$$k \int_G u_t(x) p[ku_t(x)] dx - \int_G M[ku_t(x)] dx = 1$$

определяет k как неявную функцию t , причем функция $k(t)$ имеет непрерывную производную $k'(t)$.

Лемма доказана.

Условие (18.35) выполняется, если функция $p'(u)$ монотонна. Действительно, если $p'(u)$ убывает, то в силу четности $p'(u)$

$$p(|u|) = \int_0^{|u|} p'(t) dt > |u| p'(u).$$

*) См. сноску на стр. 216.

Если же $p'(u)$ возрастает, то

$$p(2|u|) = \int_0^{2|u|} p'(t) dt > \int_{|u|}^{2|u|} p'(t) dt > |u| p'(u).$$

Из леммы 18.4 и 18.5 вытекает

Теорема 18.6 Пусть N -функция $M(u)$ имеет непрерывную вторую производную $p'(u)$, положительную при $u \neq 0$ и удовлетворяющую неравенству (18.35). Пусть дополнительная функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда норма Орлича является дифференцируемым функционалом на E_M . Градиент Γ нормы Орлича определяется равенством

$$\Gamma u(x) = p(k^* u(x)) \quad (u(x) \in E_M),$$

где

$$\int_G N[p(k^* |u(x)|)] dx = 1.$$

ГЛАВА IV
НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 19. Оператор П. С. Урысона

1. Оператор П. С. Урысона. *Оператором П. С. Урысона* будем называть оператор, определенный формулой

$$Ku(x) = \int_G k[x, y, u(y)] dy. \quad (19.1)$$

Относительно функции $k(x, y, u)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. она непрерывна по u почти при всех $x, y \in G$ и измерима по совокупности переменных x, y при каждом u *).

Будем предполагать, что функция $k(x, y, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y)[a(x) + R(|u|)] \quad (19.2)$$

$(x, y \in G, -\infty < u < \infty),$

где

$$\int \int_G M[k(x, y)] dx dy \leq b < \infty, \quad (19.3)$$

$M(u)$ — некоторая N -функция, $a(x)$ — неотрицательная функция, $R(u)$ — неотрицательная монотонно возрастающая при $u > 0$ непрерывная функция.

Нас будет интересовать вопрос о том, в каких случаях условия (19.2) и (19.3) достаточны для того, чтобы опера-

*) Мы не будем останавливаться на доказательстве измеримости тех множеств и функций, которые встречаются в дальнейших построениях.

тор П. С. Урысона действовал в некотором пространстве Орлича L_Φ^* и был в этом пространстве непрерывен, ограничен, компактен, вполне непрерывен*).

Допустим, что из условий (19.2) и (19.3) вытекает ограниченность значений оператора (19.1) на шаре $T(\theta, r; L_\Phi^*)$:

$$\|Ku\|_\Phi \leq c \quad (\|u\|_\Phi \leq r). \quad (19.4)$$

Естественно предполагать, что постоянная c зависит только от числа b и функций $a(x)$, $R(u)$ и $M(u)$. Пусть $k(x)$ — неотрицательная функция из L_M^* , для которой

$$\int_G M[k(x)] dx \leq \frac{b}{\text{mes } G}.$$

Тогда для оператора

$$Ku(x) = \int_G \frac{k(x) + k(y)}{2} R(|u(y)|) dy$$

выполнены условия (19.2) и (19.3). Поэтому в силу условия (19.4)

$$\left\| \int_G k(y) R(|u(y)|) dy + k(x) \int_G R(|u(y)|) dy \right\|_\Phi \leq 2c \quad (\|u\|_\Phi \leq r). \quad (19.5)$$

Отсюда следует, что $k(x) \in L_\Phi^*$. Значит, $L_M^* \subset L_\Phi^*$ и в силу теоремы 13.1 при больших значениях аргумента и некотором $\alpha > 0$

$$\Phi(\alpha u) < M(u). \quad (19.6)$$

Из (19.5) следует также, что интегралы $\int_G k(y) R(|u(y)|) dy$ конечны для любой функции $k(x) \in L_M^*$ и, более того, что

*) Оператор называется *компактным* на множестве T , если он каждое ограниченное подмножество $T_1 \subset T$ преобразует в компактное множество. Оператор называется *вполне непрерывным*, если он компактен и непрерывен. Отметим, что для нелинейных операторов из компактности не вытекает непрерывность.

оператор

$$Ru(x) = R\left(\frac{r|u(x)|}{2}\right)$$

преобразует шар $T(\theta, r; L_\Phi^*)$ в некоторое ограниченное множество пространства L_N^* , где через $N(v)$, как обычно, обозначается N -функция, дополнительная к $M(u)$. В силу теоремы 17.5 можно указать также положительные постоянные c_1 , c_2 и c_3 , что

$$N\left[\frac{1}{c_1}R\left(\frac{ru}{2}\right)\right] \leq c_2 + c_3\Phi(u) \quad (-\infty < u < \infty.)$$

Из этого неравенства вытекает, что при больших значениях аргумента

$$N[\beta R(\gamma u)] < k\Phi(\alpha u). \quad (19.7)$$

В связи с установленными неравенствами дальнейшее исследование проводится в предположении, что при больших значениях u

$$N[\beta R(\gamma u)] < kM(u), \quad (19.8)$$

а N -функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям (19.6) и (19.7).

2. Ограниченность оператора П. С. Урысона. Основное внимание мы уделим тому случаю, когда функция $N(v)$, дополнительная к $M(u)$, удовлетворяет Δ' -условию.

Лемма 19.1. Пусть N -функция $N(v)$ удовлетворяет Δ' -условию. Пусть выполнены условия (19.2), (19.3), (19.6) и (19.7). Пусть, наконец, $a(x) \in L_N^* = L_N$. Тогда оператор (19.1) определен на шаре $T\left(\theta, \frac{\gamma}{\alpha}; L_\Phi^*\right)$ и множество его значений имеет равномерно ограниченные нормы в L_Φ^* :

$$\|Ku\|_\Phi \leq C\|k(x, y)\|_{\dot{M}} \quad \left(\|u\|_\Phi \leq \frac{\gamma}{\alpha}\right), \quad (19.9)$$

где постоянная C не зависит от ядра $k(x, y)$.

Доказательство. Пусть неравенство (19.7) выполняется при $u \geq u_0$. Так как

$$\begin{aligned} \|a(x) + R(|u(x)|)\|_N &\leq \|a\|_N + \frac{1}{\beta}\|\beta R(|u(x)|)\|_N \leq \\ &\leq \|a\|_N + \frac{1}{\beta}\left\{1 + \int_G N[\beta R(|u(x)|)] dx\right\}, \end{aligned}$$

то в силу (19.7) при $\|u\|_{\Phi} \leq \frac{\gamma}{\alpha}$

$$\begin{aligned} \|a(x) + R(|u(x)|)\|_N &\leq \\ &\leq \|a\|_N + \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + N [\beta R(\gamma u_0) \text{mes } G + k \int_G \Phi \left[\frac{\alpha}{\gamma} u(x) \right] dx \right\} \leq \\ &\leq \|a\|_N + \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + k + N [\beta R(\gamma u_0)] \text{mes } G \right\}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leq C_1 \quad \left(\|u\|_{\Phi} \leq \frac{\gamma}{\alpha} \right). \quad (19.10)$$

В силу теоремы 15.4 линейный интегральный оператор

$$Av(x) = \int_G k(x, y)v(y) dy$$

действует из L_N в L_{Φ}^* , причем

$$\|Av\|_{\Phi} \leq 2l \|k(x, y)\|_{\hat{M}} \|v\|_N. \quad (19.11)$$

В силу (19.2)

$$|Ku(x)| \leq A[a(x) + R(|u(x)|)],$$

откуда в силу (19.11) и (19.10)

$$\|Ku\|_{\Phi} \leq 2l \|k(x, y)\|_{\hat{M}} \|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leq 2C_1 l \|k(x, y)\|_{\hat{M}}.$$

Лемма доказана.

3. Переход к более простому оператору. Будем предполагать, что выполнены условия леммы 19.1. В силу теоремы 17.1 можно указать такую последовательность замкнутых множеств $\hat{G}_n \subset \hat{G}$, что $\text{mes}(\hat{G} \setminus \hat{G}_n) < \frac{1}{n}$, на множествах $\hat{G}_n \times (-\infty, \infty)$ функция $k(x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных, а на множествах \hat{G}_n непрерывны функции $k(x, y)$ и $k(x, y)a(y)$. Положим

$$k_n(x, y, u) = \begin{cases} k(x, y, u), & \text{если } \{x, y\} \in \hat{G}_n, \\ 0, & \text{если } \{x, y\} \notin \hat{G}_n. \end{cases}$$

Каждая из функций $k_n(x, y, u)$ удовлетворяет условию (19.2) и в силу леммы 19.1 определяет оператор П. С. Урысона

$$K_n u(x) = \int_G k_n[x, y, u(y)] dy,$$

действующий из шара $T\left(\theta, \frac{\gamma}{\alpha}; L_\Phi^*\right)$ в L_Φ^* .

Очевидно,

$$Ku(x) - K_n u(x) = \int_G k[x, y, u(y)] \chi(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n) dy.$$

В силу (19.2) и леммы 19.1

$$\begin{aligned} & \|Ku - K_n u\|_\Phi \leq \\ & \leq \left\| \int_G k(x, y) \chi(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n) [a(x) + R(|u(y)|)] dy \right\|_\Phi \leq \\ & \leq C \|k(x, y) \chi(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n)\|_{\hat{M}} \left(\|u\|_\Phi \leq \frac{\gamma}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Предположим дополнительно, что $k(x, y) \in \hat{E}_M$. В силу теоремы 10.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k(x, y) \chi(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n)\|_{\hat{M}} = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|u\|_\Phi \leq \frac{\gamma}{\alpha}} \|Ku - K_n u\|_\Phi = 0.$$

Мы показали, что оператор K можно равномерно аппроксимировать операторами K_n , если в условиях леммы 19.1 $k(x, y) \in \hat{E}_M$.

Таким образом, для доказательства непрерывности или компактности оператора K достаточно доказать непрерывность или компактность операторов K_n . Операторы K_n определяются функциями $k_n(x, y, u)$, для которых справедливы неравенства

$$|k_n(x, y, u)| \leq a_n + b_n R(|u|) \quad (-\infty < u < \infty),$$

где

$$a_n = \max_{\{x, y\} \in \hat{G}_n} |k(x, y) a(x)|, \quad b_n = \max_{\{x, y\} \in \hat{G}_n} |k(x, y)|.$$

Таким образом, непрерывность и компактность произвольного оператора K при указанных выше предположениях будут доказаны, если будут доказаны соответствующие свойства для оператора П. С. Урысона

$$Ku(x) = \int_G k[x, y, u(y)] dy$$

в предположении, что

$$|k(x, y, u)| \leq a + R(|u|) \quad (x, y \in G, -\infty < u < \infty). \quad (19.12)$$

4. Второй переход к более простому оператору. Пусть выполнено условие (19.12). Определим новую последовательность функций $k_n(x, y, u)$ равенством

$$k_n(x, y, u) = \begin{cases} k(x, y, u), & \text{если } |u| \leq n, \\ k(x, y, n)(n+1-u), & \text{если } n < u < n+1, \\ k(x, y, -n)(u+n+1), & \text{если } -n-1 < u < -n, \\ 0, & \text{если } |u| \geq n+1. \end{cases}$$

Пусть операторы П. С. Урысона K_n определены функциями $k_n(x, y, u)$. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|u\|_{\Phi} \leq \frac{\gamma}{\alpha}} \|Ku - K_n u\|_{\Phi} = 0. \quad (19.13)$$

Пусть $u(x) \in T\left(\theta, \frac{\gamma}{\alpha}; L_{\Phi}^*\right)$. Обозначим, через G' множество $G \{|u(x)| > n\}$. Очевидно,

$$\text{mes } G' \leq \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)} \int_G \Phi\left[\frac{\alpha u(x)}{\gamma}\right] dx \leq \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)} \left\| \frac{\alpha}{\gamma} u \right\|_{\Phi} \leq \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}.$$

Оценим $\|Ku - K_n u\|_{\Phi}$. Из определения операторов K_n следует, что

$$\begin{aligned} |Ku(x) - K_n u(x)| &\leq \int_G |k[x, y, u(y)] - k_n[x, y, u(y)]| dy \leq \\ &\leq \int_{G'} |k[x, y, u(y)]| dy + \int_{G'} |k[x, y, \psi(y)]| dy, \end{aligned}$$

где $\psi(x) = nx(x; G') \text{ sign } u(x)$, $\|\psi\|_{\Phi} \leq \|u\|_{\Phi} \leq \frac{\gamma}{\alpha}$.

В силу (19.12)

$$|Ku(x) - K_n u(x)| \leq \int_G \kappa(x, y; \hat{G}') [a + R(|u(y)|)] dy + \\ + \int_G \kappa(x, y; \hat{G}') [a + R(|\psi(y)|)] dy,$$

где $\hat{G}' = G \times G'$. Из леммы 19.1 следует неравенство

$$\|Ku - K_n u\|_{\Phi} \leq 2C \|\kappa(x, y; \hat{G}')\|_{\hat{M}} = 2C \text{mes} \hat{G}' N^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes} \hat{G}'} \right).$$

Используя оценку для $\text{mes} G'$, получаем неравенство

$$\|Ku - K_n u\|_{\Phi} \leq \frac{2C \text{mes} G}{\Phi\left(\frac{an}{\gamma}\right)} N^{-1} \left[\frac{\Phi\left(\frac{an}{\gamma}\right)}{\text{mes} G} \right] \left(\|u\|_{\Phi} \leq \frac{\gamma}{a} \right),$$

откуда и следует (19.13).

Таким образом, непрерывность и компактность оператора П. С. Урысона в условиях леммы 18.1 при дополнительном условии $k(x, y) \in \hat{E}_M$ будут доказаны, если будут доказаны соответствующие свойства операторов П. С. Урысона с ограниченной функцией $k(x, y, u)$:

$$|k(x, y, u)| \leq d \quad (x, y \in G, -\infty < u < \infty), \quad (19.14)$$

удовлетворяющей условию

$$k(x, y, u) \equiv 0 \quad (|u| \geq u_0), \quad (19.15)$$

где u_0 — некоторое положительное число.

Б. Третий переход к более простому оператору. Пусть выполнены условия (19.14) и (19.15). В силу теоремы 17.1 существует такая последовательность замкнутых множеств $\hat{G}_n \subset \hat{G}$, что $\text{mes}(\hat{G} \setminus \hat{G}_n) \rightarrow 0$, а функция $k(x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных $\{x, y\} \in \hat{G}_n$, $-\infty < u < \infty$. По теореме П. С. Урысона существуют функции $k_n(x, y, u)$, непрерывные по совокупности переменных, совпадающие с $k(x, y, u)$ для $\{x, y\} \in \hat{G}_n$ и удовлетворяющие условиям

$$|k_n(x, y, u)| \leq d \quad (x, y \in G, -\infty < u < \infty), \\ k_n(x, y, u) \equiv 0 \quad (|u| \geq u_0).$$

Рассмотрим операторы П. С. Урысона K_n , определенные функциями $k_n(x, y, u)$. Каждый из операторов K_n преобразует любое пространство Орлича в равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций. Поэтому множество значений каждого оператора K_n компактно в C и, тем более, компактно в любом пространстве Орлича.

Пусть последовательность функций $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) сходится к функции $u_0(x)$ по норме пространства Орлича. Тогда эта последовательность сходится к функции $u_0(x)$ и по мере. Оператор K_n преобразует каждую сходящуюся к $u_0(x)$ по мере последовательность функций в последовательность функций, сходящуюся при каждом x , что вытекает из возможности предельного перехода под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} K_n u_0(x) &= \int_G k_n[x, y, u_0(y)] dy = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_G k_n[x, y, u_i(y)] dy = \lim_{i \rightarrow \infty} K_n u_i(x). \end{aligned}$$

Последовательность $K_n u_i(x)$ сходится к функции $K_n u_0(x)$ равномерно, так как она компактна. Таким образом, $K_n \in \{L_\Phi^* \rightarrow C; \text{вп. н.}\}$ и, тем более, $K_n \in \{L_\Phi^* \rightarrow L_\Phi^*; \text{вп. н.}\}$.

Для любой функции $u(x) \in L_\Phi^*$ справедливо очевидное неравенство

$$|Ku(x) - K_n u(x)| \leq 2d \int_G \chi(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n) dy,$$

откуда

$$\|Ku - K_n u\|_\Phi \leq C_1 \|\chi(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n)\|_\Phi.$$

Полученное неравенство означает, что непрерывные и компактные операторы K_n равномерно сходятся к оператору K на всем пространстве L_Φ^* . Значит, непрерывен и компактен оператор K .

6. Основная теорема о полной непрерывности оператора П. С. Урысона. Сформулируем результат, полученный в предыдущих пунктах.

Теорема 19.1. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — дополнителные друг к другу N -функции, вторая из которых

удовлетворяет Δ' -условию. Пусть

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y)[a(x) + R(|u|)], \quad (19.16)$$

$$(x, y \in G, -\infty < u < \infty),$$

где $k(x, y) \in \hat{E}_M$, $a(x) \in L_N^*$, $R(u)$ — неотрицательная неубывающая функция. Пусть, наконец, найдутся такие положительные числа β , γ и K , что при больших значениях аргумента

$$N[\beta R(\gamma u)] \leq KM(u). \quad (19.17)$$

Тогда оператор

$$Ku(x) = \int_G k[x, y, u(y)] dy \quad (19.18)$$

принадлежит $\{T(\theta, \gamma; L_\Phi^* \rightarrow L_\Phi^*; \text{вп. н.})$, где $\Phi(u)$ — произвольная N -функция, удовлетворяющая при больших значениях аргумента неравенствам

$$N[\beta R(\gamma u)] \leq K\Phi(u) \leq KM(u). \quad (19.19)$$

Возникает естественный вопрос, при каких дополнительных предположениях оператор K определен не только на шаре $T(\theta, \gamma; L_\Phi^*)$, но и на всем пространстве L_Φ^* ? Это будет иметь место, если в условиях (19.17) и (19.19) можно брать сколь угодно большие γ .

В частности, оператор K действует во всем L_Φ , если N -функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, так как в этом случае при больших значениях аргумента

$$N[\beta R(2^s \gamma u)] \leq K\Phi(2^s u) \leq K_1 \Phi(u) \leq K_1 M(u).$$

Аналогично проверяется, что оператор П. С. Урысона вполне непрерывен во всем пространстве L_Φ^* , если функция $R(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию: при больших значениях аргумента

$$R(2u) \leq K_1 R(u).$$

Условия (19.17) и (19.19) в некоторых случаях могут быть записаны в более простом виде.

Допустим, что функция $\Phi(u)$ такова, что $N[\Phi(u)] \sim \Phi(u)$, т. е. при больших значениях аргумента $N[\Phi(u)] \leq \Phi(au)$,

Тогда условия (19.17) и (19.19) выполняются, если

$$R(\alpha\gamma u) \leq K\Phi(u) \leq KM(u). \quad (19.20)$$

Это следует из очевидных неравенств

$$N[R(\gamma u)] \leq N\left[K\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right] \leq K_1 N\left[\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right] \leq K_1 \Phi(u) \leq K_1 M(u).$$

В книге [21д]) указаны различные условия полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L^α . Все эти теоремы относятся к случаю, когда изучаются нелинейности типа полиномиальных. Основные теоремы, указанные в [21д]), содержатся в доказанной выше теореме 19.1. Однако теорема 19.1 дает условия полной непрерывности в некоторых пространствах Орлича и таких интегральных операторов, которые содержат существенно нестепенные, например, экспоненциальные нелинейности.

Пусть, например,

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y) e^{\alpha|u|} \quad (x, y \in G, -\infty < u < \infty), \quad (19.21)$$

причем

$$|k(x, y)| \leq a |\ln r|^{1-\beta_0} + b, \quad (19.22)$$

где r — расстояние между точками $x, y \in G$.

Пусть гл. ч. $\Phi(u) = e^{|u|^{1+\beta}}$, где $0 \leq \beta < \beta_0$. Пусть $M(u) = \Phi(u)$. Очевидно, $k(x, y) \in \hat{E}_M$, так как при любом $\lambda > 0$

$$\int \int_{\hat{G}} \exp |\lambda k(x, y)|^{1+\beta} dx dy < \infty.$$

Так как $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, то дополнительная к ней функция $N(v)$ удовлетворяет Δ' -условию. В силу теоремы 6.3 $N[\Phi(u)] \sim \Phi(u)$. Поэтому можно пользоваться теоремой 19.1, в которой условия (19.7) и (19.9) заменены условием (19.20).

Условие (19.20) выполняется и, более того, выполняется при произвольном $\gamma > 0$, если $\beta > 0$.

Таким образом, при выполнении условий (19.21) и (19.22) оператор П. С. Урысона вполне непрерывен в некотором шаре пространства L_Φ^* , где $\Phi_0(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, и вполне

непрерывен во всем пространстве $L_{\Phi_0}^*$, где $\Phi(u)$ — любая функция вида $\Phi(u) = e^{|u|^{1+\beta}} - 1$, где $0 < \beta < \beta_0$.

Аналогичные рассуждения показывают, что оператор П. С. Урысона вполне непрерывен во всем пространстве $L_{\Phi_0}^*$, где $\Phi_0(u) = (e^{|u|^{1-\beta_0}} - 1)|u|$, если

$$|k(x, y, u)| \leq (a |\ln r| + b) e^{|u|^{1-\beta}}, \quad (19.23)$$

при $\beta_0 < \beta < 1$.

7. Случай слабых нелинейностей. В рассмотренных выше случаях функция $M(u)$ росла быстрее некоторой степенной функции, так как дополнительная к ней N -функция $N(v)$ удовлетворяла Δ' -условию. Это значит, что для изученных случаев функция $k(x, y)$ из условия (19.2) принадлежит некоторому L^α ($\alpha > 1$). В настоящем пункте мы будем предполагать, что

$$\int_{\hat{G}} M[k(x, y)] dx dy < \infty, \quad (19.24)$$

где $M(u) \rightarrow |u|^\alpha$ при всех $\alpha > 1$. Дополнительная к ней N -функция $N(v)$ тогда растет быстрее любой степенной. Мы будем предполагать, что $N(v)$ удовлетворяет Δ_3 -условию. Сама функция $M(u)$ при этом удовлетворяет Δ_2 -условию.

Как было выяснено выше, при изучении операторов П. С. Урысона естественно предполагать, что при больших значениях аргумента выполнено условие (19.8):

$$N[\beta R(\gamma u)] < KM(u) < M(Ku). \quad (19.25)$$

В силу теоремы 6.3 при больших значениях аргумента справедливо неравенство $N^{-1}[M(u)] < K_1 N^{-1}(u)$. Поэтому из (19.25) следует, что при больших значениях u

$$\beta R(\gamma u) < N^{-1}[M(Ku)] < K_1 N^{-1}(Ku).$$

В силу теоремы 6.1 при больших значениях u

$$\beta R(\gamma u) < \frac{K_1 Ku N^{-1}(Ku)}{K} < \frac{K_1}{Ku} M(K_2 u).$$

Так как N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то из (19.25) вытекает окончательно, что при больших значениях u

$$R(u) < C \frac{M(u)}{u}. \quad (19.26)$$

Отметим, что из (19.26) вытекает условие (19.25) и, более того, вытекает справедливость при больших значениях u и некоторых β и γ неравенства

$$N[\beta R(u)] < \frac{1}{\gamma} u. \quad (19.27)$$

Из последнего неравенства вытекает, что при больших значениях аргумента

$$R(u) < C_1 N^{-1}(u).$$

Это значит, что в рассматриваемом случае нелинейность $R(u)$ должна быть «очень» слабой. Действительно, из того, что $N(v)$ удовлетворяет Δ_3 -условию, вытекает, что $N(v)$ растет быстрее любой степенной функции. Поэтому полученное неравенство означает, что $R(u)$ растет медленнее, чем любая функция $|u|^\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Если $N(v)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, то, как отмечалось ранее (стр. 57), $N(v)$ растет быстрее некоторой функции e^{v^α} ($\alpha > 0$).

Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае $R(u)$ растет медленнее, чем $(\ln u)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Теорема 19.2. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — дополнительные друг к другу N -функции, вторая из которых удовлетворяет Δ_3 -условию. Пусть

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y)[a(x) + R(|u|)] \quad (19.28)$$

$$(x, y \in G, -\infty < u < \infty),$$

где $k(x, y) \in \hat{L}_M^* = \hat{L}_M$, $a(x) \in L_N^*$, $R(u)$ — неотрицательная, не убывающая при $u > 0$ функция. Пусть, наконец, найдется такое $C > 0$, что при больших значениях аргумента выполняется неравенство (19.26). Тогда существует такое пространство Орлика L_Φ^* , в котором действует и вполне непрерывен оператор

$$Ku(x) = \int_G k[x, y, u(y)] dy. \quad (19.29)$$

Доказательство. Так как функция $M[k(x, y)]$ суммируема на \hat{G} , то найдется (см. стр. 78) такая N -функ-

ция $\Phi(u)$, удовлетворяющая Δ_2 -условию (и даже Δ' -условию), что

$$\int_{\hat{G}} \int \Phi \{M[k(x, y)]\} dx dy < \infty. \quad (19.30)$$

Покажем, что оператор (19.29) действует в пространстве L_Φ^* . Из неравенства (19.26) вытекает справедливость при больших значениях u неравенства (19.27). Пусть оно выполняется при $u \geq u_0$. Пусть $u(x) \in L_\Phi^* = L_\Phi$. Так как

$$\begin{aligned} \|a(x) + R(|u(x)|)\|_N &\leq \|a\|_N + \frac{1}{\beta} \|\beta R(|u(x)|)\|_N \leq \\ &\leq \|a\|_N + \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + \int_G N[\beta R(|u(x)|)] dx \right\}, \end{aligned}$$

то в силу (19.27)

$$\begin{aligned} \|a(x) + R(|u(x)|)\|_N &\leq \\ &\leq \|a\|_N + \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + N[\beta R(u_0)] \text{mes } G + \frac{1}{\gamma} \int_G |u(x)| dx \right\} \leq \\ &\leq \|a\|_N + \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + N[\beta R(u_0)] \text{mes } G + \mu \|u\|_\Phi \right\}, \end{aligned}$$

где μ — некоторая постоянная.

Таким образом, при $\|u\|_\Phi \leq r$

$$\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leq C(r). \quad (19.31)$$

Применяя к линейному интегральному оператору

$$Av(x) = \int_G k(x, y)v(y) dy$$

условие а) теоремы 15.4 (положив $M_1(u) = N(u)$, $M_2(u) = \Phi(u)$, $\Psi(u) = \Phi[M(u)]$), мы в силу (19.30) убеждаемся, что оператор A действует из пространства L_N^* в пространство L_Φ и непрерывен, причем

$$\|Av\|_\Phi \leq 2l \|k(x, y)\|_{\hat{\Phi}} \|v\|_N. \quad (19.32)$$

В силу (19.28)

$$|Ku(x)| \leq A[a(x) + R(|u(x)|)],$$

откуда в силу (19.31) и (19.32)

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{\Phi} &\leq 2l\|k(x, y)\|_{\Psi} \|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leq \\ &\leq 2lC(r)\|k(x, y)\|_{\Psi}. \end{aligned}$$

Непрерывность и компактность оператора (19.29) доказываются так же, как доказывалась теорема 19.1.

Теорема доказана.

Рассмотрим простой пример. Пусть

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y)[a + \ln(|u| + 1)] \quad (19.33)$$

и

$$\int_{\hat{G}} \int |k(x, y)| \ln(|k(x, y)| + 1) dx dy < \infty. \quad (19.34)$$

Тогда оператор (19.29) действует и вполне непрерывен в некотором пространстве Орлича. Для доказательства нужно применить теорему 19.2, в которой функция $M(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|$.

8. Операторы Гаммерштейна. Рассмотрим операторы П. С. Урысона специального вида

$$Ku(x) = \int_{\hat{G}} k(x, y) f[y, u(y)] dy. \quad (19.35)$$

Такие операторы называют *операторами Гаммерштейна*.

Найденные выше условия, при которых операторы П. С. Урысона действуют в некотором пространстве Орлича и вполне непрерывны, естественно, применимы и при изучении оператора (19.33). Однако для изучения этого оператора в некоторых случаях может быть использован другой прием.

Пусть E_1 и E_2 — два банаховых пространства. Допустим, что оператор f :

$$fu(x) = f[x, u(x)],$$

действует из некоторого шара $T \subset E_1$ в пространство E_2 , непрерывен и ограничен на этом шаре. Пусть линейный интегральный оператор

$$Av(x) = \int_{\hat{G}} k(x, y) v(y) dy$$

действует из E_2 в E_1 и непрерывен. Так как оператор (19.35) можно представить в виде суперпозиции $K = Af$, то при указанных условиях он, очевидно, действует из шара T в E_1 , непрерывен и ограничен. Если оператор A вполне непрерывен, то оператор (19.35) также будет вполне непрерывным.

В качестве E_1 и E_2 можно рассматривать два пространства Орлича. В § 17 были найдены условия непрерывности и ограниченности оператора f . Объединение этих условий с условиями непрерывности (§ 15) и полной непрерывности (§ 16) оператора A дает достаточные условия непрерывности и полной непрерывности оператора Гаммерштейна.

§ 20. Некоторые теоремы существования

1. Рассматриваемые задачи. Пусть A — оператор, вообще говоря, нелинейный, действующий в некотором банаховом пространстве E . Укажем некоторые задачи, возникающие при рассмотрении уравнения

$$A\varphi = \lambda\varphi. \quad (20.1)$$

Первая задача — это отыскание условий, при которых уравнение (20.1) имеет при фиксированных значениях λ решения. Условия существования решений, как правило, желательно дополнять условиями единственности решений.

Во многих случаях оператор A обладает тем свойством, что $A\theta = \theta$, где θ — нуль пространства E . Тогда уравнение (20.1) имеет тривиальное нулевое решение при всех значениях числового параметра λ . В этих случаях интерес представляют решения, отличные от нулевого. Такие решения существуют лишь при отдельных значениях параметра λ . Ненулевые решения уравнения (20.1) принято называть *собственными векторами (собственными функциями)* оператора A . Числа λ , при которых уравнение (20.1) имеет ненулевые решения, называют *собственными значениями* оператора A .

Вторая задача — это отыскание условий, при которых оператор A имеет собственные векторы.

Совокупность собственных значений нелинейного оператора A называют (по аналогии с линейным оператором) его спектром. Если спектр оператора заполняет некоторый интервал, то отсюда следует, что оператор имеет континуум

собственных векторов. Могут быть случаи, когда бесконечное (счетное или континуальное) множество собственных функций соответствует одному собственному числу.

Третья задача — это исследование спектра нелинейного оператора и изучение топологической структуры множества собственных векторов.

Оказывается, что при широких предположениях множества собственных векторов являются образованиями типа непрерывных кривых; эти образования называют непрерывными ветвями. Приведем соответствующее определение. Множество $\mathfrak{M} \subset E$ называют *непрерывной ветвью* в шаровом слое $a < \|u - u_0\| < b$, если непусто пересечение множества \mathfrak{M} с границей S любой области \mathfrak{M} , содержащей шар $\|u - u_0\| \leq a$ и содержащейся вместе с границей в шаре $\|u - u_0\| < b$.

Основной интерес представляют условия, при которых нелинейный оператор имеет собственные векторы со сколь угодно малыми нормами. Пусть λ_0 — некоторое число и пусть каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое λ , что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ и что уравнение (20.1) при этом значении λ имеет по крайней мере одно ненулевое решение φ , удовлетворяющее условию $\|\varphi\| < \varepsilon$. Тогда число λ_0 называется *точкой бифуркации* нелинейного оператора A .

Четвертая задача — изучение точек бифуркации.

Для решения перечисленных задач (и ряда других, не упомянутых нами) в настоящее время разработаны качественные методы нелинейного функционального анализа. Применение общих предложений к исследованию конкретных уравнений (20.1) требует, чтобы оператор A обладал определенными «хорошими» свойствами: был непрерывным и ограниченным, а в других случаях вполне непрерывным, был дифференцируемым, был градиентом некоторого функционала и т. п.

В связи с этим применение общих теорем нелинейного функционального анализа к изучению конкретных нелинейных интегральных уравнений требует построения такого функционального пространства, в котором интегральный оператор действует и обладает теми или иными «хорошими» свойствами.

В большинстве известных исследований в качестве функционального пространства E применяют пространство C

непрерывных функций и различные пространства L^α . Это обстоятельство приводит к различным ограничениям, налагаемым на функции, входящие в уравнение. Применение пространств Орлича приводит к другим (иногда более слабым) ограничениям и позволяет рассматривать новые классы уравнений.

Объединение результатов предыдущих параграфов с общими предложениями нелинейного функционального анализа приводит к новым теоремам существования, теоремам о собственных функциях, точках бифуркации и т. д.

Мы приведем ниже некоторые примеры такого объединения. Читатель, знакомый с нелинейным функциональным анализом, легко продолжит список таких примеров.

2. Существование решений. Один из наиболее распространенных способов доказательства теорем существования заключается в использовании принципа Шаудера неподвижной точки.

Принцип Шаудера. Пусть вполне непрерывный оператор A преобразует шар T некоторого банахова пространства в свою часть. Тогда в шаре T найдется по крайней мере один такой элемент u_0 , что $u_0 = Au_0$.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G k[x, y, u(y)] dy + f_0(x). \quad (20.2)$$

Пусть выполнены условия (см. § 19), при которых оператор

$$Ku(x) = \int_G k[x, y, u(y)] dy \quad (20.3)$$

определен на шаре $T(\theta, \gamma; L_\Phi^*)$ и является вполне непрерывным оператором со множеством значений в L_Φ^* . Пусть

$$\sup_{\|u\|_\Phi \leq \gamma} \|Ku\|_\Phi = a.$$

Допустим, что $f_0(x) \in L_\Phi^*$ и $\|f_0\|_\Phi = \delta < \gamma$. Тогда при

$$|\lambda| \leq \frac{\gamma - \delta}{a} \quad (20.4)$$

оператор, определенный правой частью уравнения (20.2), преобразует шар $T(\theta, \gamma, L_\Phi^*)$ в свою часть:

$$\|\lambda Ku + f_0\|_\Phi \leq |\lambda|a + \|f_0\|_\Phi \leq \gamma \quad (\|u\|_\Phi \leq \gamma).$$

Оператор $\lambda Ku(x) + f_0(x)$ вполне непрерывен, так как вполне непрерывен оператор K .

Таким образом, из принципа Шаудера вытекает, что уравнение (20.2) при достаточно малых λ имеет в пространстве L_Φ^* по крайней мере одно решение.

Если оператор K определен на всем пространстве L_Φ^* , то при использовании принципа Шаудера можно рассматривать шары различных радиусов γ . В этом случае естественно рассматривать шары таких радиусов, при которых правая часть в (20.4) принимает возможно большее значение. В частности, уравнение (20.2) имеет решение при всех λ , если

$$\overline{\lim}_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{\sup_{\|u\|_\Phi \leq \gamma} \|Ku\|_\Phi} = \infty, \quad (20.5)$$

так как при выполнении этого условия для каждого λ можно указать такое достаточно большое γ , при котором выполнено (20.4).

Приведенные рассуждения позволяют доказать, например, следующее утверждение: уравнение (20.2) имеет решение при любом λ , если выполнены условия теоремы 19.2, в которых $N(v)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, и если $f_0(x)$ — суммируемая функция.

Действительно, выберем N -функцию $\Phi(u)$, удовлетворяющую Δ' -условию так, чтобы, с одной стороны, выполнялось неравенство (19.30), и, с другой, $f_0(x) \in L_\Phi^*$. Уравнение (20.2) тогда можно рассматривать как операторное уравнение в пространстве L_Φ^* .

Из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 19.2, вытекает, что

$$\begin{aligned} \|Ku\|_\Phi &\leq 2l \|k(x, y)\|_\Phi \|u(x) + R(|u(x)|)\|_N \leq \\ &\leq \alpha + \beta \|R(|u(x)|)\|_N \leq \alpha_1 + \beta_1 \|N^{-1}(|u(x)|)\|_N. \end{aligned}$$

Поэтому для доказательства равенства (20.5) достаточно доказать, что

$$\lim_{\|u\|_\Phi \rightarrow 0} \frac{\|N^{-1}(|u(x)|)\|_N}{\|u\|_\Phi} = 0. \quad (20.6)$$

Так как N -функция $N(v)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, то (см. (6.12)) найдется такое u_0 , что при $u, v \geq u_0$

$$N(u)N(v) \leq N(uv).$$

Полагая в этом неравенстве $N(u) = \rho$, $N(v) = t$ и применяя к обеим частям неравенства функцию $N^{-1}(u)$, приходим к неравенству

$$N^{-1}(\rho t) \leq N^{-1}(\rho)N^{-1}(t),$$

справедливому при $\rho, t \geq \rho_0 = N(u_0)$. Если $\rho \geq \rho_0$, а $t < \rho_0$, то

$$N^{-1}(\rho t) \leq N^{-1}(\rho \rho_0) \leq N^{-1}(\rho)N^{-1}(\rho_0).$$

Таким образом, при $\rho \geq \rho_0$ и при всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$N^{-1}(\rho t) \leq N^{-1}(\rho)N^{-1}(t) + N^{-1}(\rho)N^{-1}(\rho_0).$$

Из этого неравенства вытекает, что при $\rho \geq \rho_0$

$$\begin{aligned} N^{-1}(|u(x)|) &= N^{-1}\left(\rho \frac{|u(x)|}{\rho}\right) \leq \\ &\leq N^{-1}(\rho) \left[N^{-1}\left(\frac{|u(x)|}{\rho}\right) + N^{-1}(\rho_0) \right]. \end{aligned} \quad (20.7)$$

Пусть

$$\|N^{-1}(|u(x)|)\|_N \leq a \quad (\|u\|_\Phi \leq 1).$$

Тогда из (20.7) вытекает, что при $\|u\|_\Phi = \rho \geq \rho_0$

$$\begin{aligned} \|N^{-1}(|u(x)|)\|_N &\leq N^{-1}(\rho) [a + N^{-1}(\rho_0) \|x(x; G)\|_N] = \\ &= bN^{-1}(\rho). \end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает (20.6), так как

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{N^{-1}(\rho)}{\rho} = 0.$$

Условия существования решений у уравнения (20.2), полученные с применением пространств Орлича, отличаются от тех условий существования решений, которые появляются при использовании пространств C или L^a (см., например, [39a, б], [21a], [10]). Как мы уже отмечали выше, это объясняется тем, что в пространствах Орлича действуют и вполне

непрерывны такие операторы П. С. Урысона, которые не действуют в пространствах C или L^α .

Так, например, из теоремы 19.1 вытекает, что уравнение (20.2) имеет решение при достаточно малых λ , если

$$\int_G \exp |f_0(x)|^{1+\beta_0} dx < \infty,$$

если (см. (19.21) и (19.22))

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y) e^{\alpha |u|} \\ (x, y \in G, -\infty < u < \infty), \quad (20.8)$$

$$|k(x, y)| \leq a |\ln r|^{1-\beta_0} + b. \quad (20.9)$$

Решение $u(x)$ при этом принадлежит всем пространствам L_Φ^* , где гл. ч. $\Phi(u) = e^{|u|^{1+\beta}}$ и $0 \leq \beta < \beta_0$.

Из теоремы 19.2, например, вытекает, что уравнение (20.2) имеет решение при всех λ , если $f_0(x)$ суммируема, а (см. (19.33) и (19.34))

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y) [a + \ln(|u| + 1)] \\ (x, y \in G, -\infty < u < \infty) \quad (20.10)$$

и

$$\int_G \int |k(x, y)| \ln(|k(x, y)| + 1) dx dy < \infty. \quad (20.11)$$

Мы указали два примера. В каждом из них оператор (20.3) нельзя без дополнительных предположений рассматривать в пространствах L^α : в первом из них — по причине «сильной» нелинейности, а во втором — по причине того, что ядро $k(x, y)$ может иметь «сильные» особенности.

Для доказательства теорем существования решений можно применять и другие принципы неподвижной точки.

3. Положительные собственные функции. Замкнутое выпуклое множество \mathfrak{K} банахова пространства E называется *конусом*, если из $u \in \mathfrak{K}$ следует, что $tu \in \mathfrak{K}$ при всех $t > 0$ и если из $u, -u \in \mathfrak{K}$ следует, что $u = \theta$.

Нетрудно видеть, что совокупность неотрицательных функций в каждом пространстве Орлича образует конус.

Пишут $u_1 \ll u_2$, если $u_2 - u_1 \in \mathfrak{K}$. Оператор A , действующий в пространстве E с конусом \mathfrak{K} , называется

положительным, если $A\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$. Оператор A называется монотонным, если из $u_1 \ll u_2$ вытекает $Au_1 \ll Au_2$.

Известны многочисленные условия существования собственных векторов у положительных вполне непрерывных операторов [21д, гл. 5]. Все они применимы к операторам, действующим в пространствах Орлича.

Напомним одну из общих теорем.

Пусть положительный вполне непрерывный оператор K удовлетворяет неравенству

$$Au \ll Ku \quad (u \in \mathfrak{R}), \quad (20.12)$$

где A — линейный вполне непрерывный положительный оператор, обладающий тем свойством, что для любого $u \in \mathfrak{R}$ ($u \neq \theta$) найдутся такие положительные числа α, β , что

$$\alpha u_0 \ll Au \ll \beta u_0. \quad (20.13)$$

Тогда собственные векторы u оператора K :

$$Ku = \lambda u, \quad (20.14)$$

соответствующие положительным собственным значениям λ , образуют в конусе \mathfrak{R} непрерывную ветвь бесконечной длины, т. е. на границе каждой ограниченной области, содержащей θ , есть по крайней мере один собственный вектор оператора K , лежащий в конусе \mathfrak{R} .

Пусть выполнены условия теоремы 19.1 и пусть $k(x, y, u)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$k(x, y, u) \geq a^2 u \quad (x, y \in G, u \geq 0), \quad (20.15)$$

где $a \neq 0$. Тогда оператор K удовлетворяет условию (20.12), в котором

$$Au(x) = a^2 \int_G u(y) dy.$$

Оператор A , очевидно, удовлетворяет условию (20.13), где $u_0(x) \equiv 1$.

Из сформулированной теоремы вытекает, что при этих условиях уравнение

$$\int_G k[x, y, u(y)] dy = \lambda u(x) \quad (20.16)$$

имеет континуум положительных решений, соответствующих, возможно, различным значениям положительного параметра λ . Эти решения образуют в соответствующем пространстве Орлица непрерывную ветвь бесконечной длины. В этой непрерывной ветви, в частности, есть решения со сколь угодно малой и со сколь угодно большой нормой.

Так, например, для существования континуальной ветви положительных решений у уравнения (20.16) достаточно, чтобы выполнялись условия (20.8), (20.9) и (20.15).

4. Собственные функции потенциальных операторов. Оператор называется потенциальным, если он является градиентом некоторого функционала. Известен ряд теорем о существовании собственных функций у потенциального оператора. Использование пространств Орлица при применении этих теорем позволяет расширить классы изучаемых операторов. Это использование проводится по следующей схеме.

Пусть H — линейный оператор, действующий из L^2 в пространство Орлица L_Φ^* . Пусть $F_1(u)$ — вещественный функционал на L_Φ^* (или на некотором шаре этого пространства). Тогда $F(u) = F_1(Hu)$ будет функционалом, определенным на L^2 (или на некотором шаре пространства L^2). Если оператор H вполне непрерывен, то нетрудно видеть, что функционал $F(u)$ слабо непрерывен, т. е. его значения сходятся на каждой слабо сходящейся в L^2 последовательности функций.

Если функционал $F_1(u)$ дифференцируем в пространстве Орлица и имеет своим градиентом оператор Γ_1 , то функционал $F(u)$ дифференцируем в L^2 и его градиентом является оператор

$$\Gamma = H^* \Gamma_1 H, \quad (20.17)$$

где H^* — сопряженный H оператор, действующий из сопряженного L_Φ^* пространства в L^2 . Действительно, если

$$F_1(v + g) - F_1(v) - (\Gamma_1 v, g) = \omega(v, g),$$

где

$$\lim_{\|g\|_\Phi \rightarrow 0} \frac{|\omega(v, g)|}{\|g\|_\Phi} = 0,$$

то

$$\begin{aligned} F(u+h) - F(u) - (Gu, h) &= \\ &= F_1(Hu + Nh) - F_1(Hu) - (G_1 Hu, Nh) = \omega(Hu, Nh), \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\|h\|_{L^2} \rightarrow 0} \frac{|\omega(Hu, Nh)|}{\|h\|_{L^2}} \leq \|H\| \lim_{\|Nh\|_{\Phi} \rightarrow 0} \frac{|\omega(Hu, Nh)|}{\|Nh\|_{\Phi}} = 0.$$

Если $u(x)$ является решением уравнения

$$H^* G_1 H u(x) = \lambda u(x), \quad (20.18)$$

то $Hu(x)$ будет решением уравнения

$$H H^* G_1 v(x) = \lambda v(x). \quad (20.19)$$

Таким образом, доказательство теорем существования различных решений у уравнения (20.19) можно свести к доказательству теорем существования решений в L^2 у уравнения (20.18). Для доказательства же существования решений в L^2 у уравнения с потенциальным оператором могут быть применены, как мы уже указывали, различные общие утверждения [21д, гл. 6].

Теоремы 16.8 и 18.1 содержат условия, при которых оператор

$$K u(x) = \int_G k(x, y) f[y, u(y)] dy \quad (20.20)$$

с симметричным положительно определенным ядром $k(x, y)$ представим в виде $K = H H^* G_1$, где $G_1 = f$ является градиентом некоторого функционала.

Известно, что градиент каждого слабо непрерывного в L^2 функционала имеет континуум собственных функций. Поэтому из приведенных рассуждений вытекает, что *при выполнении условий теорем 16.8 и 18.1 уравнение*

$$\int_G k(x, y) f[y, u(y)] dy = \lambda u(x)$$

имеет континуум различных собственных функций, каждая из которых соответствует некоторому значению параметра λ .

Вариационные соображения можно применять также при доказательстве теорем существования решений.

5. Теорема о точках бифуркации. Пусть вполне непрерывный оператор K ($K\theta = \theta$) имеет в точке θ производную Фреше B . Оператор B при этом также вполне непрерывен. Известно, что каждое собственное значение нечетной кратности линейного оператора B является точкой бифуркации оператора K .

Для того чтобы применить это утверждение к исследованию нелинейных интегральных операторов K , вполне непрерывных в некотором пространстве Орлица, нужно знать условия, при которых этот оператор K дифференцируем в нуле этого пространства.

Рассмотрим, например, оператор (20.20). Его можно представить в виде суперпозиции $K = Af$, где A — линейный интегральный оператор, определенный ядром $k(x, y)$. Если оператор f действует из пространства $L_{M_1}^*$ в пространство $L_{M_2}^*$ и имеет в точке θ производную Фреше f_1 :

$$f_1 u(x) = f'_u(x, 0)u(x),$$

а оператор A действует из $L_{M_2}^*$ в $L_{M_1}^*$, то, как легко видеть, оператор K дифференцируем в нуле θ пространства $L_{M_1}^*$, и его производная Фреше B имеет вид

$$Bu(x) = Af_1 u(x) = \int_{\sigma} k(x, y) f'_u(y, 0) u(y) dy. \quad (20.21)$$

Объединяя условия полной непрерывности линейного интегрального оператора (§ 16) с условиями, при которых оператор f действует из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$ и дифференцируем в нуле θ пространства $L_{M_1}^*$ (§ 18), приходим к условиям, при которых каждое нечетнократное собственное значение ядра $k(x, y) f'_u(y, 0)$ является точкой бифуркации оператора (20.20).

СВОДКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выпуклые функции

1. Пусть $p(t)$ и $q(s)$ — две непрерывные справа ($s, t > 0$) неубывающие функции, «обратные» друг к другу в том смысле, что

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t, \quad p(t) = \sup_{q(s) \leq t} s, \quad (1)$$

и удовлетворяющие условиям

$$p(0) = q(0) = 0, \quad p(+\infty) = q(+\infty) = +\infty.$$

Выпуклые функции $M(u)$ и $N(v)$, определенные равенствами

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt, \quad N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds, \quad (2)$$

называются дополнительными друг к другу N -функциями.

Примерами дополнительных друг к другу N -функций могут служить следующие пары функций:

$$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad N_1(v) = \frac{|v|^\beta}{\beta} \quad \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right),$$

$$M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1, \quad N_2(v) = (1 + |v|) \ln(1 + |v|) - |v|.$$

Если при больших значениях аргумента $M_1(u) \leq M_2(u)$, то при больших значениях v для дополнительных N -функций выполняется противоположное неравенство $N_2(v) \leq N_1(v)$.

Для дополнительных друг к другу N -функций справедливо неравенство Юнга:

$$uv \leq M(u) + N(v). \quad (3)$$

Это неравенство превращается в равенство лишь при определенном образом связанных значениях u и v :

$$|u|p(|u|) = M(u) + N[p(|u|)], \quad (4)$$

$$q(|v|)|v| = M[q(|v|)] + N(v). \quad (5)$$

2. Если при больших значениях аргумента $M_1(u) \leq M_2(ku)$, то пишут $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$. Если $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$ или $M_2(u) \rightarrow M_1(u)$, то N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ называются *сравнимыми*. Из $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$ вытекает соотношение $N_2(v) \rightarrow N_1(v)$ для дополнительных N -функций.

N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ называются *эквивалентными* ($M_1(u) \sim M_2(u)$), если $M_1(u) \rightarrow M_2(u)$ и $M_2(u) \rightarrow M_1(u)$; N -функции, дополнительные эквивалентным, также эквивалентны. Существуют различные признаки эквивалентности N -функций.

Для каждой последовательности N -функций $M_n(u)$ ($n = 1, 2, \dots$) можно указать такие N -функции $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$, что для всех n справедливы соотношения $\Phi(u) \rightarrow M_n(u) \rightarrow \Psi(u)$.

3. Говорят, что $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если при больших значениях аргумента

$$M(2u) \leq kM(u). \quad (6)$$

N -функции, удовлетворяющие Δ_2 -условию, при больших значениях аргумента мажорируются степенной функцией.

Для того чтобы $M(u)$ удовлетворяла Δ_2 -условию, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{u p(u)}{M(u)} < \infty. \quad (7)$$

Для того чтобы $M(u)$ удовлетворяла Δ_2 -условию, необходимо и достаточно, чтобы дополнительная функция $N(v)$ при больших значениях аргумента удовлетворяла неравенству

$$N(v) \leq \frac{1}{2l} N(lv). \quad (8)$$

где $l > 1$.

Примерами N -функций, удовлетворяющих Δ_2 -условию, могут служить функции:

$$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha} (\alpha > 1); \quad M_2(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|; \quad (9)$$

$$M_3(u) = |u|^\alpha (|\ln |u|| + 1) (\alpha > 1); \quad M_4(u) = \frac{u^2}{\ln(|u| + e)}.$$

Δ_2 -условию удовлетворяет также N -функция $M(u)$, дополнительная к $N(v) = e^{v^2} - 1$; явный вид функции $M(u)$ неизвестен.

Существуют также дополнительные друг к другу N -функции $M(u)$ и $N(v)$, каждая из которых не удовлетворяет Δ_2 -условию.

4. Говорят, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, если при больших значениях u и v

$$M(uv) \leq CM(u)M(v). \quad (10)$$

Если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, то она удовлетворяет и Δ_2 -условию.

Δ' -условию, например, удовлетворяют N -функции $M_1(u)$, $M_2(u)$ и $M_3(u)$ из (9). Функция $M_4(u)$ Δ' -условию не удовлетворяет.

Если при каждом фиксированном достаточно большом u функция

$$h(t) = \frac{p(ut)}{p(t)} \quad (11)$$

не возрастает при больших t , то N -функция $M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$ удовлетворяет Δ' -условию.

Если при больших значениях t функция $p(t)$ дифференцируема, то для выполнения Δ' -условия достаточно, чтобы функция

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)} \quad (12)$$

не возрастала при больших значениях t . Если $g(t)$ не убывает, то Δ' -условию удовлетворяет N -функция $N(v)$, дополнительная к $M(u)$.

5. Если N -функция $M(u)$ эквивалентна $|u| M(u)$, то говорят, что $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию.

Функции, удовлетворяющие Δ_3 -условию, растут при больших значениях аргумента быстрее любой степенной. Однако не все N -функции, растущие быстрее любой степенной, удовлетворяют Δ_3 -условию.

Если $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию, то дополнительная к ней N -функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию и при

больших значениях аргумента удовлетворяет неравенствам

$$k_1 v M^{-1}(k_1 v) \leq N(v) \leq k_2 v M^{-1}(k_2 v), \quad (13)$$

где $M^{-1}(v)$ — функция, обратная к $M(u)$.

Если $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию и при больших значениях аргумента

$$2p^2(u) \geq M(u) p'(u), \quad (14)$$

то дополнительная к $M(u)$ N -функция $N(v)$ эквивалентна N -функции, равной при больших значениях аргумента $v M^{-1}(v)$. Например, если $M(u) = e^{u^2} - 1$, то $N(v)$ эквивалентна N -функции, равной $v \sqrt{\ln v}$ при больших значениях v .

Если $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию, то $M(u) \sim N[M(u)]$.

Из класса N -функций, удовлетворяющих Δ_3 -условию, выделяется более узкий класс функций, *удовлетворяющих Δ^2 -условию*: $M(u) \sim M^2(u)$. Примерами таких функций могут служить N -функции $M_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, $M_2(u) = e^{u^2} - 1$. N -функция $M(u)$, равная $u^{\ln u}$ при больших значениях u , удовлетворяет Δ_3 -условию, но не удовлетворяет Δ^2 -условию.

Для того чтобы $M(u)$ удовлетворяла Δ^2 -условию, достаточно, чтобы при больших значениях аргумента выполнялось неравенство $p^2(u) < p(ku)$. Для того чтобы N -функция $M(u)$ удовлетворяла Δ^2 -условию, необходимо и достаточно, чтобы дополнительная к ней N -функция $N(v)$ удовлетворяла при больших значениях v неравенству

$$\frac{N(v)}{v} < k \frac{N(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}. \quad (15)$$

Из того, что $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, вытекает, что дополнительная функция $N(v)$ удовлетворяет Δ' -условию.

Если N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ растут быстрее любой степенной, то при некоторых дополнительных предположениях суперпозиции $N_1[N_2(v)]$ эквивалентна N -функции $\frac{N_1(v) N_2(v)}{|v|}$. Это имеет, например, место, если обе функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ удовлетворяют Δ^2 -условию.

6. Пусть N -функция $M(u)$ при больших значениях аргумента совпадает с функцией вида

$$u^a (\ln u)^{l_1} (\ln \ln u)^{l_2} \dots (\ln \ln \dots \ln u)^{l_n},$$

где $\alpha > 1$. Тогда дополнительная к $M(u)$ функция $N(v)$ эквивалентна N -функции, при больших значениях аргумента равной

$$v^\beta [(\ln v)^{\gamma_1} (\ln \ln v)^{\gamma_2} \dots (\ln \ln \dots \ln v)^{\gamma_n}]^{1-\beta},$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Пространства Орлича

1. Пусть G — ограниченное замкнутое множество конечного евклидова пространства, а $M(u)$ — некоторая N -функция. Классом Орлича $L_M = L_M(G)$ называется совокупность функций $u(x)$, для которых

$$\rho(u; M) = \int_G M[u(x)] dx < \infty. \quad (16)$$

Каждая суммируемая на G функция принадлежит некоторому классу Орлича.

Классы Орлича являются выпуклыми множествами. Класс L_M является линейным множеством тогда и только тогда, когда N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Последовательность функций $u_n(x) \in L_M$ называется сходящейся в среднем к нулю, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n; M) = 0$.

2. Линейная оболочка класса Орлича L_M превращается в полное нормированное пространство L_M^* , если ввести норму равенством

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \int_G u(x)v(x) dx. \quad (17)$$

Пространство L_M^* называется *пространством Орлича*. Это пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Норма характеристической функции $\chi(x, \mathcal{E})$ множества $\mathcal{E} \subset G$ вычисляется по формуле

$$\|\chi(x, \mathcal{E})\|_M = \text{mes } \mathcal{E} N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}}\right), \quad (18)$$

где $N^{-1}(u)$ — функция, обратная к N -функции $N(v)$, дополнительной к $M(u)$.

Для вычисления нормы можно пользоваться формулой

$$\|u\|_M = \inf_{k > 0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_G M[ku(x)] dx \right). \quad (19)$$

В пространстве L_M^* можно ввести эквивалентную (17) норму Люксембурга:

$$\|u\|_{(M)} = \inf k,$$

где инфимум распространен на те положительные k , при которых

$$\rho\left(\frac{u}{k}; M\right) = \int_G M\left[\frac{u(x)}{k}\right] dx \leq 1.$$

Норма Люксембурга связана с нормой Орлича неравенствами

$$\|u\|_{(M)} \leq \|u\|_M \leq 2\|u\|_{(M)}.$$

Эти нормы отличаются постоянным множителем лишь в том случае, когда L_M^* есть пространство L^α функций, суммируемых с некоторой степенью $\alpha > 1$.

3. Имеют место неравенства

$$\|u\|_M \leq 1 + \int_G M[u(x)] dx \quad (20)$$

и

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_M}\right] dx \leq 1. \quad (21)$$

Если $\|u\|_M \leq 1$, то

$$\int_G M[u(x)] dx \leq \|u\|_M. \quad (22)$$

Для любой пары функций $u(x) \in L_M^*$, $v(x) \in L_N^*$ функция $u(x)v(x)$ суммируема и справедливо *неравенство Гельдера*

$$\int_G u(x)v(x) dx \leq \|u\|_M \|v\|_N. \quad (23)$$

Для того чтобы произведение $u(x)w(x)$ функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, $w(x) \in L_{M_2}^*$ принадлежало пространству $L_{M_2}^*$, достаточно, чтобы существовали такие взаимно дополнительные функции $R(u)$

и $Q(u)$, что при больших значениях аргумента выполняются неравенства

$$\begin{aligned} R(\alpha u) &< M_2^{-1} [M_1(u)], \\ Q(\alpha u) &< M_2^{-1} [\Phi(u)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Если N -функция $M_2(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, то достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} R(\alpha u) &< M_1 [M_2^{-1}(u)], \\ Q(\alpha u) &< \Phi [M_2^{-1}(u)]. \end{aligned} \quad (25)$$

В описанных случаях выполняется неравенство

$$\|u(x) \varpi(x)\|_{M_2} \leq k \|u\|_{M_1} \|\varpi\|_{\Phi}.$$

Через \hat{L}_M^* обозначается пространство $L_M^*(\hat{G})$, где \hat{G} — топологическое произведение $G \times G$. Чтобы для любой пары функций $u(x), v(x) \in L_M^*$ произведение $u(x)v(y)$ принадлежало \hat{L}_M^* , необходимо и достаточно, чтобы N -функция $M(u)$ удовлетворяла Δ' -условию. При этом

$$\|u(x)v(y)\|_{\hat{M}} \leq c \|u\|_M \|v\|_M.$$

4. Из сходимости последовательности $u_n(x)$ к функции $u_0(x)$ по норме пространства L_M^* вытекает сходимость в среднем к нулю последовательности $u_n(x) - u_0(x)$. Сходимость по норме эквивалентна сходимости в среднем к нулю последовательности $u_n(x) - u_0(x)$ тогда и только тогда, когда $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

5. Если $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то множество ограниченных функций нигде не плотно в пространстве L_M^* . Замыкание в L_M^* множества ограниченных функций обозначается через E_M . Это пространство играет важную роль. Оно совпадает с $L_M^* = L_M$, если $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

E_M сепарабельно и имеет базис.

Для того чтобы функция $u(x) \in L_M^*$ принадлежала E_M , необходимо и достаточно, чтобы ее норма была абсолютно

непрерывной. Абсолютная непрерывность нормы означает, что каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что

$$\|u(x) \chi(x; \mathcal{E})\|_M < \varepsilon,$$

когда скоро $\text{mes } \mathcal{E} < \delta$ ($\mathcal{E} \subset G$).

Если $p(u) = M'(u)$ непрерывна, то для вычисления нормы функций из E_M можно пользоваться формулой

$$\|u\|_M = \int_G p(k^* |u(x)|) |u(x)| dx, \quad (26)$$

где k^* определяется из уравнения

$$\int_G N[p(k^* |u(x)|)] dx = 1. \quad (27)$$

Пространство E_M позволяет описать расположение класса L_M в пространстве L_M^* : класс L_M содержит совокупность Π всех функций u , для которых $\inf_{w \in E_M} \|u - w\|_M < 1$ и содержится в замыкании $\bar{\Pi}$.

Если E_M является правильной частью пространства L_M^* ($M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию), то Π является правильной частью L_M , а L_M — правильной частью $\bar{\Pi}$.

6. При естественных предположениях норма Орлича и норма Люксембурга в пространствах E_M (в пространстве $L_M^* = L_M$, если $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию) дифференцируемы.

Пусть N -функция $N(v)$, дополнительная к $M(u)$, удовлетворяет Δ_2 -условию. Пусть N -функция $M(u)$ имеет непрерывную монотонную вторую производную, положительную при $u \neq 0$. Тогда норма Орлича является дифференцируемым функционалом на E_M . Градиент Γ нормы Орлича определяется равенством

$$\Gamma u(x) = p(k^* u(x)), \quad (28)$$

где

$$\int_G N[p(k^* |u(x)|)] dx = 1.$$

Градиент Γ_1 нормы $\|u\|_{(M)}$ Люксембурга определяется равенством

$$\Gamma_1 u(x) = \frac{p\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right)}{\int_G p\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right) \frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}} dx}. \quad (29)$$

7. Говорят, что семейство $\mathfrak{M} \subset L_M^*$ имеет *равностепенно абсолютно непрерывные нормы*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех функций семейства $\|u(x) \chi(x, \mathcal{E})\|_M < \varepsilon$, коль скоро $\text{mes } \mathcal{E} < \delta$.

Для того чтобы сходившаяся по мере последовательность функций $u_n(x) \in E_M$ сходилась по норме, необходимо и достаточно, чтобы она имела равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Отсюда следует, что семейство $\mathfrak{M} \subset E_M$ компактно в L_M^* , если оно имеет равностепенно абсолютно непрерывные нормы и компактно в смысле сходимости по мере.

На семейства функций, лежащие в пространстве E_M , обобщаются также известные признаки компактности А. Н. Колмогорова и Ф. Рисса.

8. Различные N -функции определяют, вообще говоря, различные пространства Орлича.

Для того чтобы имело место теоретико-множественное включение $L_{M_1}^* \subset L_{M_2}^*$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $M_2(u) \rightarrow M_1(u)$. При этом нормы оказываются согласованными

$$\|u\|_{M_2} \leq q \|u\|_{M_1} \quad (u(x) \in L_{M_1}^*). \quad (30)$$

Пространства $L_{M_1}^*$ и $L_{M_2}^*$ состоят из одних и тех же функций тогда и только тогда, когда $M_1(u) \sim M_2(u)$. Нормы, порожденные эквивалентными N -функциями, эквивалентны.

Функционалы и операторы

1. Общий вид линейного функционала на пространстве E_M задается формулой

$$l(u) = \int_G u(x) v(x) dx, \quad (31)$$

где $v(x) \in L_N^*$. Норма функционала l совпадает с нормой Люксембурга $\|v\|_{(N)}$ функции $v(x)$.

Если $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то существуют линейные функционалы на L_M^* , не допускающие интегрального представления (31).

Пространство L_M^* рефлексивно тогда и только тогда, когда и $M(u)$ и дополнительная функция $N(v)$ удовлетворяют Δ_2 -условию.

2. В пространстве L_M^* вводится E_N -слабая сходимость: последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ E_N -слабо сходится, если последовательность чисел $\int_G u_n(x)v(x)dx$ сходится для каждой функции $v(x) \in E_N$. Из E_N -слабой сходимости последовательности функций вытекает ограниченность норм элементов последовательности.

Каждое пространство Орлича E_N -слабо полно и E_N -слабо компактно. Пространство E_M этими свойствами не обладает: E_N -слабым замыканием пространства E_M является все пространство L_M^* .

Из сходимости по мере и ограниченности норм вытекает E_N -слабая сходимость.

3. Найдены различные признаки непрерывности и полной непрерывности линейных интегральных операторов

$$A\varphi(x) = \int_G k(x, y)\varphi(y)dy, \quad (32)$$

действующих из одного пространства Орлича в другое. Сформулируем основной результат.

Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ — дополнительные друг к другу N -функции. Пусть ядро $k(x, y)$ принадлежит пространству \hat{L}_Ψ^* . Тогда оператор (32) действует из пространства $L_{M_1}^*$ в пространство $L_{M_2}^*$ и непрерывен, если выполнено одно из следующих условий:

- а) $M_2[N_1(v)] \rightarrow \Psi(v)$;
- б) $N_1[M_2(v)] \rightarrow \Psi(v)$;
- в) функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ' -условию и

$$M_2(v) \rightarrow \Psi(v), \quad N_1(v) \rightarrow \Psi(v).$$

Если в условиях этой теоремы ядро $k(x, y)$ принадлежит пространству \hat{E}_Ψ (замыканию в \hat{L}_Ψ^* множества ограниченных

на \hat{G} функций), то оператор (28) вполне непрерывен. В этом случае оператор (32) преобразует каждую E_{N_1} -слабо сходящуюся последовательность функций из $L_{M_1}^*$ в последовательность, сходящуюся по норме пространства $L_{M_2}^*$.

4. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — дополнительные друг к другу N -функции, причем $N(u) \rightarrow u^2 \rightarrow M(u)$. Пусть квадрат A^2 положительно определенного самоспряженного в L^2 линейного непрерывного оператора A допускает непрерывное продолжение в оператор, действующий из E_N в L_M^* . Тогда оператор A действует из L^2 в L_M^* и непрерывен.

Если в условиях сформулированной теоремы продолжение оператора A^2 является вполне непрерывным оператором, действующим из E_N в L_M^* , то и оператор A является вполне непрерывным оператором, действующим из L^2 в L_M^* .

Из этих утверждений вытекают различные условия расщепляемости линейного оператора A , действующего из E_N в L_M^* , в произведение $A = NN^*$, где N действует из L^2 в L_M^* , а N^* — сопряженный к N оператор, действующий из E_N в L^2 .

5. Изучается оператор f :

$$fu(x) = f[x, u(x)],$$

где $f(x, u)$ ($x \in G$, $-\infty < u < \infty$) непрерывна по u и измерима по x при каждом u . Найдены условия, при которых оператор f действует из некоторой области пространства $L_{M_1}^*$ в пространство $L_{M_2}^*$, непрерывен и ограничен. В отличие от случая пространств L^α оператор f может быть определен на некотором шаре, но не быть определенным на всем пространстве. Он может быть непрерывным в каждой точке некоторой ограниченной замкнутой области, но не быть в этой области ограниченным.

Сформулируем несколько предложений о свойствах оператора f .

Через Π_r обозначим совокупность таких функций $u(x) \in L_{M_1}^*$, для которых расстояние до E_{M_1} меньше r . Пусть оператор f действует из Π_r в E_{M_2} . Тогда оператор f непрерывен в каждой точке Π_r . Множество его значений на шаре $\|u\|_{M_1} \leq r_1 < r$ ограничено по норме $L_{M_2}^*$.

Конкретные условия непрерывности и ограниченности оператора f удобно выражать в оценках роста функции $f(x, u)$.

Если

$$|f(x, u)| \leq b(x) + aQ^{-1} \left\{ M_2^{-1} \left[M_1 \left(\frac{u}{r} \right) \right] \right\} \quad (33)$$

$$(x \in G, -\infty < u < \infty),$$

где $b(x) \in E_{M_2}$, $Q(u)$ — некоторая N -функция, $a, r > 0$, то оператор f действует из Π_r в E_{M_2} , непрерывен во всех точках Π_r и ограничен на каждом шаре $\|u\|_{M_1} \leq r_1 < r$. В случае, когда $M_2(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, в (33) можно положить $Q(u) = u$.

6. Пусть существуют такие дополнительные друг к другу N -функции $R(u)$ и $Q(u)$, что при больших значениях аргумента выполнены неравенства (24) или, если $M_2(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, неравенства (25). Пусть существует производная $f'_u(x, u)$, которая определяет непрерывный оператор f_1 : $f_1 u(x) = f'_u[x, u(x)]$, действующий из шара $\|u\|_{M_1} \leq r$ в пространство L_{Φ}^* . При этих предположениях оператор f в каждой внутренней точке указанного шара дифференцируем по Фреше, причем его дифференциал Фреше Bh в точке $u(x)$ имеет вид

$$Bh(x) = f'_u[x, u(x)]h(x).$$

Более тонкими являются условия дифференцируемости оператора f не в области, а в некоторой изолированной точке.

7. Нелинейный интегральный оператор

$$K\varphi(x) = \int_G k(x, y)f[y, \varphi(y)]dy \quad (34)$$

можно представить как суперпозицию нелинейного оператора f и линейного интегрального оператора (32). Объединяя условия, при которых оператор f действует из пространства $L_{M_1}^*$ в пространство $L_{M_2}^*$, непрерывен и ограничен на некотором шаре, с условиями, при которых оператор (32) действует из $L_{M_2}^*$ в $L_{M_1}^*$ и вполне непрерывен, приходим к условиям полной непрерывности оператора (34) в пространстве $L_{M_1}^*$.

Условия полной непрерывности в пространствах Орлича устанавливаются и для нелинейных интегральных операторов более общего вида

$$K\varphi(x) = \int_G k[x, y, \varphi(y)] dy. \quad (35)$$

Эти условия позволяют для некоторых операторов с существенно нестепенными нелинейностями выбирать такие пространства Орлича, в которых они вполне непрерывны.

Пусть, например,

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y)[a(x) + R(|u|)] \\ (x, y \in G, -\infty < u < \infty),$$

где $k(x, y) \in \hat{E}_M$, $a(x) \in L_N^*$, $R(u)$ — неотрицательная непрерывная функция, $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию (например, растет как e^u). Пусть при больших значениях аргумента

$$R(\gamma u) \leq KM(u).$$

При этих предположениях оператор (35) действует из некоторого шара пространства L_M^* в L_M^* и вполне непрерывен.

Доказывается ряд других свойств нелинейных интегральных операторов.

8. Знание пространств, в которых интегральные операторы (35) обладают «хорошими» свойствами (непрерывны, вполне непрерывны, дифференцируемы, потенциальны и т. п.), позволяет применить общие методы нелинейного функционального анализа к исследованию уравнения

$$\lambda\varphi(x) = \int_G k[x, y, \varphi(y)] dy. \quad (36)$$

Применение этих методов приводит к различным теоремам существования решений и собственных функций, к теоремам о точках бифуркации и структуре спектра и т. д. Особенность доказываемых теорем заключается в том, что нелинейности в рассматриваемых уравнениях могут носить существенно нестепенной характер.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

§§ 1, 2. Основные понятия теории выпуклых функций были установлены Иенсенем [13]. Подробные изложения начал теории выпуклых функций (в частности N -функций) читатель может найти в [58], [41], [12].

Принятое нами определение N -функции совпадает с определением N' -функции у Бирнбаума и Орлича [4].

§ 3. Бирнбаум и Орлич [4] называют N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ эквивалентными, если при больших значениях аргумента

$$aM_1(u) \leq M_2(u) \leq bM_1(u).$$

Эквивалентность в этом смысле означает, что N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ определяют один и тот же класс Орлича (см. § 8). Эквивалентность в нашем определении [25a] означает, что N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ определяют пространства Орлича, состоящие из одних и тех же функций.

§§ 4, 5. Классы N -функций, удовлетворяющих Δ_2 - и Δ' -условиям, по-видимому, впервые выделены в работе Бирнбаума и Орлича [4]. Признаками выполнения этих условий они не интересовались.

Указанные в §§ 4, 5 предложения были ранее сообщены в [25e, ж]. Утверждение, близкое к теореме 4.2, было сформулировано С. М. Лозинским [31] (при дополнительном предположении, что $N(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию *).

Отметим, что до сих пор не найдены достаточно obvious необходимые и достаточные признаки выполнения Δ' -условия. Было бы интересно найти такие признаки в терминах, относящихся к дополнительной функции.

*) При ознакомлении с рукописью настоящей книги С. М. Лозинский любезно сообщил авторам о найденном им ряде признаков выполнения Δ_2 -условия; эти исследования, проведенные около десяти лет назад, еще не опубликованы.

§ 6. В этом параграфе с существенными дополнениями изложены предложения, которые ранее были опубликованы в [25в, е, и].

Нам неизвестны удобные признаки того, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 -условию, выраженные в терминах, относящихся к дополнительной функции $N(v)$. Желательно было бы получить такие признаки в форме, аналогичной теореме 6.8.

Более узкие классы быстрорастущих N -функций можно выделять при помощи условия, аналогичных Δ_3 -условию. Скажем, например, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_Φ -условию, где $\Phi(u)$ — некоторая фиксированная N -функция, если $\Phi[M(u)] \sim M(u)$. Можно показать, что класс N -функций, удовлетворяющих каждому Δ_Φ -условию, непуст. Например, если гл. ч. $\Phi(u) = e^{ln^2 u}$, гл. ч. $M(u) = e^{eu}$, то, очевидно, $\Phi[M(u)] \sim M(u)$. Изучение классов N -функций, удовлетворяющих Δ_Φ -условию, не проводилось.

§ 7. Результаты этого параграфа были ранее изложены в [25г] для несколько более общего класса N -функций.

§ 8. Рассматриваемые классы функций были детально изучены в работе Бирнбаума и Орлича [4] (см. также [62]). Классы и пространства Орлича были использованы в ряде работ различных авторов (см., например, [12], [14], [18], [20], [31], [36]) в основном в связи с задачами теории функций (теория рядов, сингулярных интегралов, теория приближения и т. п.). Классы Орлича были использованы в связи с теорией полуупорядоченных пространств Л. В. Канторовичем [16].

Отметим также связь работ японских математиков Накано, Ямамура и др. [37], [63], [1] по теории модулированных пространств с теорией классов и пространств Орлича.

§ 9. Пространства L_M^* введены в рассмотрение Орличем в [40а]. В этой статье изучались пространства L_M^* в предположении, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Без этого предположения ряд свойств пространства L_M^* доказан в [40б] и [12].

Норма, определенная формулой (9.18), введена Люксембургом в [32]. Аналогичной формулой можно вводить нормы в модулированных пространствах (см. [3], [63]).

Отметим, что рядом авторов (см., например, [12], [32], [496]) изучались пространства Орлича функций, определенных на множествах бесконечной меры и на множествах, мера которых не непрерывна. В частном случае, когда множество состоит из последовательности точек, каждая из которых имеет меру, равную единице, пространство Орлича превращается в пространство числовых последовательностей. Это пространство обозначают через l^M ; оно является обобщением пространств l^p . Эти пространства изучались Орличем [406], а в последнее время молодым казанским математиком Ю. И. Грибановым. Н. Динкуляну рассматривал [9а, 6] пространства Орлича абстрактных функций.

§ 10. Пространство E_M было введено и изучено в [256, д, е]. Необходимые и достаточные условия сепарабельности пространств Орлича были указаны в [406]. Теоремы 10.1 и 10.3 были доказаны в [256, е]. Пункт 7 написан авторами совместно с Н. Г. Шимко.

§ 11. Обобщение теоремы А. Н. Колмогорова об условиях компактности семейств функций в пространствах L^p на случай пространств Орлича было произведено Такагаши [52] в предположении, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Более точно: ему принадлежит теорема 11.2. Теорема 11.3 для случая пространств L^p указана в [21в]. Теорема 11.4, являющаяся обобщением аналогичной теоремы Ф. Рисса для пространств L^p [43], доказана Ю. И. Грибановым [8]. Отметим, что утверждение близкое к теореме 11.4, можно получить как непосредственное следствие одного общего признака компактности, доказанного Г. Е. Шиловым [616].

Рассмотрим линейное нормированное пространство R , состоящее из комплекснозначных функций, заданных на коммутативной бикompактной группе H (с аддитивной записью операций). Пространство R согласно Г. Е. Шилову [61а] называется *однородным пространством функций*, если вместе с каждой функцией $f(t) \in R$ все ее сдвиги $f(t+h)$ также принадлежат пространству R , причем

$$\|f(t+h)\| = \|f(t)\| \quad (f(t) \in R, h \in H)$$

и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(t+h) - f(t)\| = 0 \quad (f(t) \in R).$$

Теорема Г. Е. Шилова. Множество \mathfrak{M} компактно в однородном пространстве функций R в том и только том случае, если \mathfrak{M} ограничено в R и элементы множества \mathfrak{M} равномерно непрерывны относительно сдвига.

Под *равностепенной непрерывностью* понимается следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U нуля группы H , что из $h \in U$ следует $\|f(t+h) - f(t)\| < \varepsilon$ для любой функции $f(t) \in \mathfrak{M}$.

Доказательство теоремы Шилова использует гармонический анализ на группах.

Тамаркиным [54] ошибочно, как отметил И. П. Натансон, доказывалась независимость первого условия теоремы А. Н. Колмогорова о компактности семейств функций в L^p от других условий этой теоремы. Как недавно показал В. Н. Судаков, условие ограниченности норм рассматриваемого множества функций в теореме А. Н. Колмогорова и в дальнейших ее обобщениях на пространства L (А. Н. Тудлайков [53]) и пространства Орлича является следствием других условий и может быть опущено.

§ 12. Тот факт, что функции Хаара образуют базис в пространстве L_M^* , если $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, указал Орлич в [40a].

В статье М. З. Соломяка [51] показано, что базис из функций Хаара в сепарабельных пространствах Орлича обладает свойством ортогональности. Это значит, что для частных сумм ряда (12.3) выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+m} c_i \varphi_i(x) \right\|_M \geq \left\| \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right\|_M.$$

Приведенное в § 12 второе доказательство необходимого условия сепарабельности L_M^* заимствовано из [26a]. Исползованный в этом доказательстве переход к пространству функций, определенных на отрезке, может быть применен и для доказательства многих других предложений. Таким образом, в ряде разделов можно было ограничиться рассмотрением пространств Орлича функций, заданных на отрезке. Авторы этого не делали по той причине, что рассмотрение произвольных множеств G с непрерывной мерой не вызывает дополнительных трудностей.

Доказательство того факта, что любое множество конечной непрерывной меры может быть взаимно однозначно отображено на отрезок так, что при этом отображении мера каждого подмножества не изменяется, см. в [45].

§ 13. Часть результатов этого параграфа была ранее изложена в [25а, г, е].

§ 14. Теорема об общем виде линейного функционала на пространстве L_M^* в случае, когда N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, была доказана в [40а]. В [40б] доказана теорема 14.1. Для случая, когда Δ_2 -условие не выполнено, теорема об общем виде линейного функционала на E_M доказана в [25д] (см. также [32]). Вопрос об общем виде линейного функционала на L_M^* для случая, когда $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, остается открытым.

Теорема о связи нормы линейного функционала и нормы Люксембурга, порождающей его функции, доказана в [32]. Функция $k(v)$ детально изучена Д. В. Салеховым в [47а, б].

В работе Амеция [1] в связи с теорией модулированных пространств изучена связь между нормой Люксембурга и нормой, определенной формулой (10.11). Предполагается, что эти нормы отличаются постоянным множителем, и доказывается, что в этом случае рассматриваемые пространства есть L^p . В силу теоремы 10.5 формула (10.11) определяет обычную норму Орлича, а норма Люксембурга совпадает с нормой порождаемого ею линейного функционала (см. пункт 5). Поэтому из результатов Амеция также вытекает теорема Д. В. Салехова, приведенная на стр. 148.

Рассмотрение обычной слабой сходимости неудобно, так как неизвестен общий вид линейного функционала на L_M^* . В связи с этим оказалось удобным рассмотреть ту слабую сходимость, которая возникает, если считать L_M^* пространством линейных функционалов на E_N .

§§ 15, 16. Укажем некоторые из многочисленных работ, в которых изучались линейные интегральные операторы. Наиболее детальный анализ линейных интегральных операторов для случая пространств C непрерывных функций был проведен Радоном [42]. Для случая пространств L^p простейшие теоремы см. в [3], [44].

Линейные интегральные операторы специального вида (так называемые операторы типа потенциала) изучены

в работах С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева (см. [60]). Сильные результаты в изучении интегральных операторов, действующих в L^p , получены Л. В. Канторовичем [15], обобщившим результаты С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева.

Ряд теорем о линейных интегральных операторах, действующих в пространствах Орлича, доказан Цаненом [60]. Исследованию линейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича, посвящены работы авторов [256, *], развитие которых и составляет основное содержание §§ 15 и 16.

Теорема 16.3 была доказана ранее Цаненом в предположении, что все рассматриваемые N -функции удовлетворяют Δ_2 -условию.

Естественно ожидать, что новые условия непрерывности и полной непрерывности линейных интегральных операторов, действующих из одного пространства Орлича в другое, могут быть получены на пути, предложенном Л. В. Канторовичем [15] при изучении операторов, действующих в пространствах L^p . В этих новых условиях ограничения на ядра должны, по-видимому, формулироваться следующим образом: существуют такие функции $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $R_1(u)$ и $R_2(u)$, что

$$\varphi(x) = \int_G R_1[k(x, y)] dy \in L_{\Phi_1}^*$$

и

$$\psi(y) = \int_G R_2[k(x, y)] dx \in L_{\Phi_2}.$$

Тогда линейный интегральный оператор, определенный ядром $k(x, y)$, действует из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$. Функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ должны быть при этом связаны с функциями $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $R_1(u)$ и $R_2(u)$ некоторыми соотношениями (пока неизвестными).

Первые теоремы о расщеплении линейных операторов были указаны в [21в] (см. также [21д]). Для случая пространств Орлича первые теоремы о расщеплении линейных операторов получены в [21г] и подробно изложены в [253]. Ряд теорем о расщеплении линейных операторов получен в [5в, г], [22], [266], [40в]. Примененный в книге метод доказательства теорем о расщеплении линейных операторов заим-

ствован из [22]. Заметим, что в теоремах 15.5 и 16.7 можно не предполагать (см. [22]), что оператор A самосопряжен: тогда условию теорем должен удовлетворять не оператор A^2 , а оператор AA^* .

Заметим, что из теоремы 16.9 об операторах типа потенциала вытекают по известной схеме [60], [16] дополнения к теоремам вложения. Другие дополнения к теоремам вложения С. Л. Соболева, В. И. Кондрашева и С. М. Никольского с применением метрик Орлича указаны Е. П. Калугиной в [14а, 6].

Пункт 3 параграфа 16 взят из [46в].

§ 17. Условия Каратеодори при рассмотрении нелинейных операторов впервые были применены в [17].

Теорема 17.1, обобщающая теорему Н. Н. Лузина о C -свойстве измеримой функции, была доказана, по-видимому, впервые в [23].

Оператор f для случая различных функциональных пространств (особенно для пространств L^p) изучался рядом авторов (см., например, [39а], [21д], [56, г]). Для случая пространств Орлича основные предложения о непрерывности и ограниченности оператора f были указаны в [46а, 6], [25з]. В несколько более общей форме эти предложения изложены в пунктах 2—6.

Теорема 17.8 взята из [46в].

§ 18. Функционал (18.6) был использован рядом авторов ([6], [7], [21д], [5а, г], [49а], [466] и др.). Для случая пространств L^p теорема 18.1 была доказана А. И. Позолоцким (см. [216]). Функционал (18.6), определенный на пространствах Орлича, рассматривался в [466], а затем в [25з].

Общие факты дифференциального исчисления в функциональных пространствах изложены в [35], [59], [5а]. Часть теорем о дифференцируемости оператора f , действующего в пространствах Орлича, ранее была опубликована в [25в, 3]. Из работ, в которых изучалась дифференцируемость оператора f в пространствах L^p , отметим статью [56]. Формулы для градиентов норм Орлича и Люксембурга (см. [25к]) обобщают формулу Мазура для градиента нормы в L^p .

§ 19. Доказанные в этом параграфе теоремы являются обобщением некоторых предложений, полученных в [23] (см. также [21д]). Анализ операторов Гаммерштейна, действующих

в пространствах Орлича, основанный на представлении этих операторов в виде $K = Af$ проведен в [25a].

Исследование различных нелинейных интегральных операторов, действующих в других функциональных пространствах, проводилось во многих работах ([7], [10], [11], [5r], [21д], [39a, б], [29] и др.).

§ 20. Общим методом нелинейного функционального анализа посвящены, например, работы [39б], [21д], [30].

В [21д] доказаны все предложения, на которые имеются ссылки в этом параграфе.

Изложенная в пункте 2 теорема существования решений для уравнений со слабыми нелинейностями основана на соображениях В. М. Дубровского, примененных им в [11] при изучении других классов интегральных уравнений.

Теория банаховых пространств с конусом была развита в основном М. Г. Крейном (основные предложения этой теории изложены в [28]). Теория конусов в значительной своей части пересекается с теорией полуупорядоченных пространств (см. [16]).

Использованная в пункте 3 общая теорема о непрерывной ветви положительных собственных функций является частным случаем более общих теорем об операторах с монотонными минорантами (см. [21, л]).

Применение вариационных методов к исследованию уравнений с операторами Гаммерштейна ведет свое начало от работ [6], [7]. Изложенная в пункте 4 схема с расщеплением оператора A в произведение HN^* предложена одним из авторов. Применение этой схемы с использованием пространств L^p подробно изложено в [21д]. Для случая пространств Орлича указанная схема применена в [465], а затем в [25a].

Примечание. Недавно получен ряд новых результатов (напр., [64-71]), относящихся к пространствам Орлича.

В. С. Виденский [66] обнаружил интересную связь теории N -функций с теорией целых функций. В частности, он показал, что $N(v) \sim \ln \sum \exp [nv - M(n)]$, где $M(u)$ и $N(v)$ — произвольные взаимно дополнительные N -функции.

В [69] показано, что множество функций $u(x)$, для которых $M^{-1}[u(x)]$ суммируема, образует кольцо в том и только том случае, когда $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Амемия (Amemiya J.), A characterization of the modulars of L_p type, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. 1, 13 (1954).
2. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.
3. Банах С., Курс функционального анализа, Київ, 1948.
4. Бирнбаум и Орлич (Birnbauм Z. und Orlicz W.), Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Stud. Math., 3 (1931).
5. Вайнберг М. М., а) Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах, УМН 7. вып. 4 (1952). б) Оператор В. В. Немыцкого, Укр. матем. журнал 7, 4 (1955). в) О некоторых свойствах квадратичных форм в пространствах L^q , ДАН СССР 100, № 5 (1955). г) Вариационные методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1957.
6. Гаммерштейн (Hammerstein A.), Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, Acta Math. 54 (1929).
7. Голомб (Golomb M.), а) Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen, Math. Zeitschrift 39 (1934). б) Über Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen, Publ. Mathem. de l'université de Belgrade, v. V (1936).
8. Грибанов Ю. И., Нелинейные операторы в пространствах Орлича, Уч. зап. Казанского ун-та 115, 7 (1955).
9. Динкуляну Н. (Dinculeanu N.), а) Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis. mat. e natur. 22, 2 (1957). б) Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Fonctionelles inéaires continues. Atti Accad. naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. e natur. 22, 3 (1957).
10. Драгони (Dragoni G.), Sui sistemi di equazioni integrali non lineari, Rend. Semin. mat. Univ. Padova VII (1936).
11. Дубровский В. М., О некоторых нелинейных интегральных уравнениях, Уч. зап. МГУ, 30 (1939).
12. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.
13. Иенсен (Jensen J. L. W. V.), Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. 30 (1906).
14. Калугина Е. П., а) Выпуклые функциональные многообразия, диссертация, ЛГУ, 1952.

- б) О классах $H_{\Phi}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$, ДАН СССР 96, 1 (1954).
- в) Класс L_{Φ} как выпуклое функциональное многообразие, ДАН СССР 98, 1 (1954).
15. Канторович Л. В., Об интегральных операторах, УМН 11, вып. 2 (1956).
16. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
17. Каратеодори (Caratheodory C.), Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin, 1918.
18. Киприянов И. А., а) О суммировании интерполяционных процессов для функций двух переменных, ДАН СССР 95, № 1 (1954).
- б) О сходимости и суммировании тригонометрических интерполяционных полиномов для функций двух переменных, ДАН СССР 97, № 6 (1954).
19. Колмогоров А. Н., Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel., Göttinger Nachrichten 60 (1931).
20. Коренблюм Б. И., О сходимости сингулярных интегралов для некоторых общих классов суммируемых функций, Сб. трудов ин-та математики АН УССР 11, 1948.
21. Красносельский М. А., а) Операторы с монотонными минорантами, ДАН СССР 76, 4 (1951).
- б) К задаче о собственных функциях нелинейных уравнений Доклад в Московском матем. об-ве, УМН 6, вып. 4 (1951).
- в) Расщепление линейных операторов, действующих из L^p в L^q , ДАН СССР 82, 3 (1952).
- г) Расщепление линейного интегрального оператора, действующего из одного пространства Орлича в другое, ДАН СССР 97, 6 (1954).
- д) Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
22. Красносельский М. А. и Крейн С. Г., Признаки непрерывности и полной непрерывности линейного оператора, выраженные в свойствах его квадрата, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 5 (1957).
23. Красносельский М. А. и Ладыженский Л. А., Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, Труды Моск. матем. об-ва 3, (1954).
24. Красносельский М. А. и Поволоцкий А. И., К вариационным методам в задаче о точках бифуркации, ДАН СССР 91, 1 (1953).
25. Красносельский М. А. и Ругицкий Я. Б., а) К теории пространств Орлича, ДАН СССР 81, 4 (1951).
- б) Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича, ДАН СССР 85, 1 (1952).
- в) Дифференцируемость нелинейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича, ДАН СССР 89, 4 (1953).
- г) Об одном способе построения N^{ν} -функций, эквивалентных исполнителем к заданным, Труды физ.-мат. ф-та ВГУ 33 (1954).

д) О линейных функционалах в пространствах Орлича, ДАН СССР 97, 4 (1954).

е) Общая теория пространств Орлича, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 1 (1956).

ж) Линейные интегральные операторы, действующие в пространствах Орлича, Труды семинара по функциональному анализу ВГУ, вып. 2 (1956).

з) Пространства Орлича и нелинейные интегральные уравнения, Труды Мсск. матем. об-ва 7 (1958).

и) Об одном классе выпуклых функций, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 5 (1957).

к) О некоторых нелинейных сператорах в пространствах Орлича, ДАН СССР 117, № 3 (1957).

26. Красносельский М. А. и Соболев В. И., а) Условия сепарабельности пространств Орлича, Известия АН СССР, серия матем., 19, 1 (1955).

б) О расщеплении линейных операторов, УМН 4 (1957).

27. Крейн М. Г., О дифференциальных самосопряженных операторов и их симметрических функциях Грина, Матем. сб. т. II, вып. 6 (1937).

28. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные сператоры, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, вып. 23 (1948).

29. Ладыженский Л. А., Условия полной непрерывности интегрального оператора П. С. Урысона в пространстве непрерывных функций, ДАН СССР 97, 5 (1954).

30. Лере Ж. и Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения, УМН 1, вып. 3—4 (1946).

31. Лозинский С. М., О сильной сходимости рядов Фурье, ДАН СССР 51, 1 (1946).

32. Люксембург (Luxemburg W. A. J.), Banach function spaces, 1955.

33. Люксембург и Цанен (Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C.), а) Some remarks on Banach function spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A. 59-Indag. Math. 18 (1956).

б) Conjugate spaces of Orlicz spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A. 59-Indag. Math. 18 (1956).

34. Люстерник Л. А., Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве, Известия АН СССР, серия матем., 3 (1939).

35. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951.

36. Медведев Ю. Т., Обобщение одной теоремы Ф. Рисса, УМН 8, 6 (1952).

37. Накано (Nacano H.), Modularized semi-ordered linear spaces, Tokyo Mathem. Book-series, v. 1, 1950.

38. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950.

39. Немыцкий В. В., а) Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений, Матем. сб. 4, 3 (1934).

- б) Метод неподвижной точки в анализе, УМН, вып. 1 (1936).
40. Орлич (Orlicz W.), а) Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, Bull. intern. de l'Acad. Pol. série A, Cracovie (1932).
б) Über Räume (L^M), Bull. Intern. de l'Acad. Pol. série A, Cracovie (1936).
41. Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, ч. I, Гостехиздат, 1956.
42. Радон И., О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях, УМН, вып. 1 (1936).
43. Рисс Ф. (Riesz F.), Untersuchungen über Systeme Integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910).
44. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
45. Рохлин В. А., Об основных понятиях теории меры, Матем. сб. 25 (67): 1 (1949).
46. Рутцкий Я. Б., а) Про один нелінійний оператор, що діє в просторах Орліча, Доповіди АН УРСР 3 (1952).
б) Применение пространств Орлича при исследовании некоторых функционалов в L^2 , ДАН СССР 105, 6 (1955).
в) Об одном свойстве вполне непрерывных линейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича, УМН 11, вып. 2 (1956).
47. Салехов Д. В., а) О норме линейного функционала в пространстве Орлича и об одной внутренней характеристике пространства L^p , ДАН СССР 111, 5 (1956).
б) Характеристическое свойство пространств L^p в классе пространств Орлича, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 5 (1957).
в) О точках Лебега—Орлича, ДАН СССР 116, № 3 (1957).
48. Скворцов П. Г., О сильной сходимости сумм Валле-Пуссена в пространствах Орлича, ДАН СССР 108, 5 (1956).
49. Соболев В. И., а) Об одном нелинейном интегральном уравнении, ДАН СССР 71, 5 (1950).
б) Пространства Орлича над множествами бесконечной меры, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 2 (1956).
в) О расщеплении линейных операторов, ДАН СССР 111, 5 (1956).
50. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.
51. Соломяк М. З., Об ортогональном базисе в пространстве Банаха, Вестник Ленинградского ун-та, № 1, серия математики, механики и астрономии, вып. 1 (1957).
52. Такагашаи (Takahashi T.), On the compactness of the function set by the convergence in mean of general type, Stud. Math. 5 (1934).
53. Тулайков А. Н., Zur kompaktheit im Raum L^p für $p = 1$, Göttinger Nachrichten (1933).
54. Тамаркин (Tamarin J. D.), On the compactness of the space L^p , Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932).

55. Урысон П. С., Об одном типе нелинейных интегральных уравнений, Матем. сб. 31 (1936).
56. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Гостехиздат, 1951.
57. Хаар (Haar A.), Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. 69 (1910).
58. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е. и Полиа Г., Неравенства, ИЛ, 1948.
59. Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1951.
60. Цанен (Zaanen A. C.), а) On a certain class of Banach spaces, Annals of Math. 47, № 4 (1946).
б) Note on a certain class of Banach spaces, Nederl. Akad. wetensch. Prcc. 52-Indag. Math. 11 (1949).
в) Integral transformations and their resolvents in Orlicz und Lebesgue spaces, Compositio Math. 10 (1952).
г) Linear Analysis, New York and Amsterdam, 1953.
61. Шолов Г. Е., а) Однородные кольца, УМН 6, вып. 1 (1951).
б) Критерий компактности в однородном пространстве функций, ДАН СССР 92, 1 (1953).
62. Юнг (Joung W. H.), On classes of summable functions and their Fourier series, Prcc. Roy. soc. (A) 87 (1912).
63. Ямамура (Jamamuro S.), Exponents of modularized semi-ordered linear spaces, Fac. sci. Hokkaido Univ., ser. 1, 12, № 4 (1953).
- 64*) Альбрехт (Albrycht J.), Some remarks on the Marcinkiewicz — Orlicz space, Bull. Acad. polon. sci., 1, cl. 3, 4 (1956).
65. Вейсс (Weiss G.), A note on Orlicz spaces. Portugaliae math, 15, 1—2 (1956).
66. Виденский В. С., Применение теории целых функций к построению и исследованию N' -функций, дополнительных к данным N' -функциям, ДАН СССР, 121, 2 (1958).
67. Грибанов Ю. И., К теории пространств L_M , Уч. зап. Казанск. ун-та, 117, 2 (1957).
68. Динкуляну (Dinculeanu N.), Spatii Orlicz de cimpuri de vectori, Studii si cercetari mat. Acad. RPR, 8, 3—4 (1957).
69. Красносельский М. А. Об одном функциональном кольце, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 6 (1958).
70. Милнс (Milnes H. W.), Convexity of Orlicz spaces, Pacif. J. Math. 7. 3 (1957).
71. Шрагин И. В., О некоторых операторах в обобщенных пространствах Орлича, ДАН СССР, 117, 1 (1957).

*) Сведения об изданиях [64 — 71] стали известны авторам уже во время прохождения корректуры этой книги.

Красносельский Марк Александрович
и
Рутицкий Яков Брониславович.
Выпуклые функции и пространства Орлича.

Редактор *Горячая М. М.*
Технический редактор *Крючкова В. Н.*
Корректор *Бакулова А. С.*

Сдано в набор 1/II 1958 г.
Подписано к печати 5/VIII 1958 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 8,5. Условн.
печ. л. 13,94. Уч.-изд. л. 14,34. Тираж 5000 экз. Т.-06203.
Цена 9 р. 20 к. Заказ № 2810.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

